

Equivalence of the representations 表現の同値性

2026/08/05

Hotaka Hayashi

量子情報の一般的定式化

第7回 量子チャネル – 表現の同値性

元の教材 IBM Quantum Learning:

<https://quantum.cloud.ibm.com/learning/en/courses/general-formulation-of-quantum-information/quantum-channels/representations-of-channels>

Foundations of quantum computing

Course series

Quantum Information & Computation with John Watrous



Course 1

Basics of Quantum Information

Learn about quantum information, from states and measurements to quantum circuits and entanglement.

15 hours

Course 2

Fundamentals of Quantum Algorithms

Learn how quantum algorithms beat classical algorithms for problems including integer factoring and search.

15 hours

Course 3

General Formulation of Quantum Information

Dive deeper into quantum information, including density matrices, channels, and general measurements.

15 hours

Course 4

Foundations of Quantum Error Correction

Learn how quantum computations can be protected against noise through quantum error correcting codes and fault tolerance.

15 hours

Quantum Tokyo の和訳:

<https://quantum-tokyo.github.io/introduction/courses/general-formulation-of-quantum-information/quantum-channels/representation-equivalence-ja.html>



Quantum Tokyo へようこそ

学習コンテンツ

Qiskit の始め方

IBM Quantum Platform 教材

日本語訳

ユーティリティ・スケー

≡



量子情報の一般的定式化

General formulation of quantum information

source: <https://quantum.cloud.ibm.com/learning/ja/courses/general-formulation-of-quantum-information>

密度行列

[はじめに](#)

1. 密度行列の基礎 ([📄 解説スライド](#))
2. 密度行列の凸結合 ([📄 解説スライド](#))
3. [ブロッホ球](#)
4. [複数システムと縮約状態](#)

量子チャネル

目次

1. 前回のまとめ：チャネルの表現

2. チャネルの同値性の証明

- チャネル $\rightarrow$ Choi表現
- Choi表現 $\rightarrow$ Kraus表現
- Kraus表現 $\rightarrow$ Stinespring表現
- Stinespring表現 $\rightarrow$ チャネル

目次

1. 前回のまとめ：チャネルの表現

2. チャネルの同値性の証明

- チャネル $\rightarrow$ Choi表現
- Choi表現 $\rightarrow$ Kraus表現
- Kraus表現 $\rightarrow$ Stinespring表現
- Stinespring表現 $\rightarrow$ チャネル

前回のまとめ

前回は、任意の量子チャネル Φ を表現する方法として3つの手法を学習した。

Stinespring表現 :

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_G(U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger)$$

例 : $\text{Tr}_W(CX(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)CX^\dagger)$, $\text{Tr}_W(CZ(|+\rangle\langle +|_W \otimes \rho)CZ^\dagger)$ (完全デコヒーレンスチャネル)

Kraus表現 :

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \rho A_k^\dagger$$

例 : $A_0 \rho A_0^\dagger + A_1 \rho A_1^\dagger = |0\rangle\langle 0| \rho |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \rho |1\rangle\langle 0|$ (完全デコヒーレンスチャネル)

$A_0 \rho A_0^\dagger = U \rho U^\dagger$ (ユニタリチャネル)

Choi表現 (Choi行列) :

$$J(\Phi) = \sum_{a,b \in \Sigma} |a\rangle\langle b| \otimes \Phi(|a\rangle\langle b|)$$

※Choi行列は忠実な表現である。(Choi行列が一致する $\Leftrightarrow$ チャネルが一致する)

目次

1. 前回のまとめ：チャネルの表現

2. チャネルの同値性の証明

- チャネル $\rightarrow$ Choi表現
- Choi表現 $\rightarrow$ Kraus表現
- Kraus表現 $\rightarrow$ Stinespring表現
- Stinespring表現 $\rightarrow$ チャネル

表現の同値性

今回は、前回学んだ3つの表現方法が数学的に同値であり、かつチャネルの性質を正しくとらえていることを証明する。

証明のプロセス：

以下の4つの記述を考える。

1. Φ は系 $X \rightarrow Y$ のチャネルである。
2. Choi行列 $J(\Phi)$ があって、これが半正定値であり、かつ $\text{Tr}_Y(J(\Phi)) = I_X$ を満たす。
3. Φ のKraus表現が存在する。
4. Φ のStinespring表現が存在する。

これらについて、「1ならば2」「2ならば3」「3ならば4」「4ならば1」を全て証明する。
→ これらが証明されれば、1,2,3,4がすべて同値である。

記号

X ：量子系（入力系） Y ：量子系（出力系）

Φ ：行列 $\rightarrow$ 行列の線形写像。

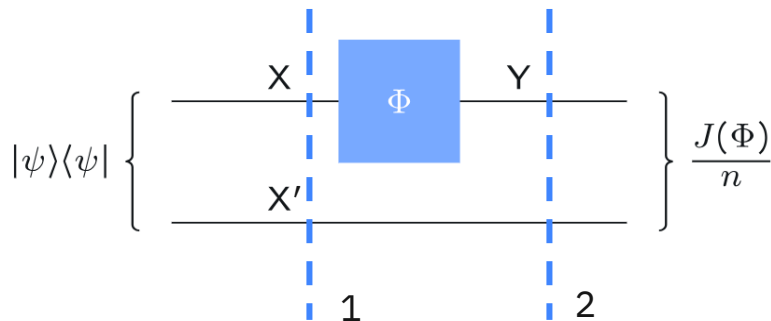
1 → 2の証明：チャネル→Choi表現

チャネル Φ について、そのChoi行列 $J(\Phi)$ を量子状態と紐づけて密度行列として得られることを、前回の教材で学んだ。密度行列の性質から、命題も証明される。

【命題】

「1. Φ は系 $X \rightarrow Y$ のチャネルである」

ならば「2. Choi行列 $J(\Phi)$ があって、これが半正定値であり、かつ $\text{Tr}_Y(J(\Phi)) = I_X$ を満たす。」



1. 初期状態（密度行列）：

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{n} \sum_{a,b=0}^{n-1} |a\rangle\langle b| \otimes |a\rangle\langle b|$$

2. 入力系 X のみに対しチャネル Φ を適用：

$$(\text{Id} \otimes \Phi)(|\psi\rangle\langle\psi|) = \frac{1}{n} \sum_{a,b=0}^{n-1} |a\rangle\langle b| \otimes \Phi(|a\rangle\langle b|) = \frac{J(\Phi)}{n}$$

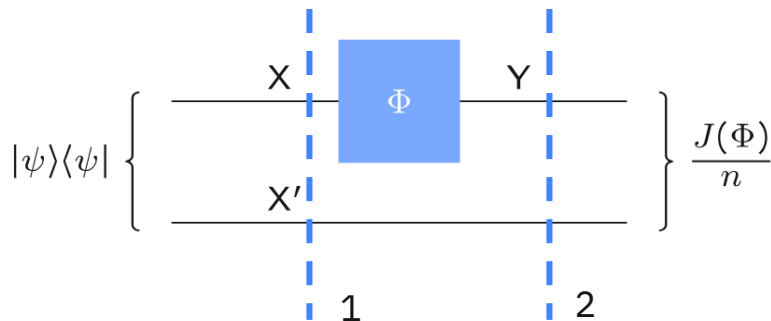
1 → 2の証明：チャネル→Choi表現

チャネル Φ について、そのChoi行列 $J(\Phi)$ を量子状態と紐づけて密度行列として得られることを、前回の教材で学んだ。密度行列の性質から、命題も証明される。

【命題】

「1. Φ は系 $X \rightarrow Y$ のチャネルである」

ならば「2. Choi行列 $J(\Phi)$ があって、これが半正定値であり、かつ $\text{Tr}_Y(J(\Phi)) = I_X$ を満たす。」



- 出力系 Y を無視したコピー系 X' は、単なる完全混合状態のはずである。

$$\text{Tr}_Y\left(\frac{J(\Phi)}{n}\right) = \frac{I_{X'}}{n} \rightarrow \text{Tr}_Y(J(\Phi)) = I_X$$

- $\frac{J(\Phi)}{n}$ は密度行列であるため、半正定値である。
その正の定数倍の $J(\Phi)$ も半正定値である。

1 → 2が証明された。

2 → 3の証明：Choi表現→Kraus表現

ΦをKraus表現で書く

Kraus行列のトレース保存条件を確認する

Choi表現を持つ線形写像 Φ について、Kraus表現が存在することを証明する。

【命題】

線形写像 Φ について、「2. Choi行列 $J(\Phi)$ があって、これが半正定値であり、かつ $\text{Tr}_Y(J(\Phi)) = I_X$ を満たす。」ならば「3. Φ のKraus表現が存在する。」

※ここで「1. Φ は系 $X \rightarrow Y$ のチャネルである」が正しいという仮定は置けないことに注意。
つまり Φ はチャネルではなく、より一般の線形写像という前提とする。
1を前提にすると、「(1かつ2) → 3」を証明することになり、「2 → 3」の証明にならない。

【指針】

Choi行列 $J(\Phi)$ を持つ線形写像 Φ について、ある $\{A_k\}$ により以下の形で表されることを示す。

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \rho A_k^\dagger$$

ただし、 $\sum_{k=0}^{N-1} A_k^\dagger A_k = I$ である。

2 → 3の証明：Choi表現→Kraus表現

ΦをKraus表現で書く

Kraus行列のトレース保存条件を確認する

Choi行列 $J(\Phi)$ について、(A)のように書くことを考えたい。

$$J(\Phi) = \sum_{k=0}^{N-1} |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad \cdots (A)$$

Choi行列 $J(\Phi)$ が半正定値であるという仮定から、スペクトル分解により $|\psi_k\rangle = \sqrt{\lambda_k}|\gamma_k\rangle$ とすれば良い。

$$J(\Phi) = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k |\gamma_k\rangle\langle\gamma_k| \quad \cdots (B)$$

ここで、 $\sqrt{\lambda_0}, \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_{N-1}}$ を $J(\Phi)$ の固有値、 $|\gamma_0\rangle, |\gamma_1\rangle, \dots, |\gamma_{N-1}\rangle$ を対応する固有ベクトルとする。

※ $J(\Phi)$ が半正定値であるから、固有値はすべて非負の値である。

- ・固有値の選び方に自由度はないが、特に重複度が1より大きい固有値については固有ベクトルの選び方について自由度がある。
→ (A)の書き方は、一意ではない。
- ・ $|\psi_k\rangle$ を得る方法として、必ずしもスペクトル分解を考える必要はない。
あくまで(A)を得る1つの方法が(B)ということを紹介した。

2 → 3の証明：Choi表現→Kraus表現

ΦをKraus表現で書く

Kraus行列のトレース保存条件を確認する

Choi行列 $J(\Phi)$ を(A)のように書けるとする。

$$J(\Phi) = \sum_{k=0}^{N-1} |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad \cdots (A)$$

ここで、 $|\psi_k\rangle$ を以下のように分解する。

$$|\psi_k\rangle = \sum_{a \in \Sigma} |a\rangle \otimes |\phi_{k,a}\rangle \quad \cdots (C)$$

※ $\Sigma = \{0, 1, \dots, n\}$ のように Σ の要素 a について $\{|a\rangle\}_{a \in \Sigma}$ が正規直交系を形成するとき、複合系 (X, Y) のベクトル $|\psi_k\rangle$ のうち基底 $|a\rangle$ に対応する部分として $|\phi_{k,a}\rangle$ を定めればよい。

この $|\phi_{k,a}\rangle$ を用いて、Kraus行列 $A_0, A_1, \dots, A_{N-1}$ を以下で定義する。

$$A_k = \sum_{a \in \Sigma} |\phi_{k,a}\rangle\langle a| \quad \cdots (D)$$

2 → 3の証明：Choi表現→Kraus表現

ΦをKraus表現で書く

Kraus行列のトレース保存条件を確認する

ここで、新たな線形写像 Ψ を、Kraus行列を用いて定義する。

$$\Psi(\rho) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \rho A_k^\dagger \quad \dots (E)$$

証明のゴールは、線形写像 Φ が、(E) で表される Ψ と一致することを示すことである。

ここでChoi行列は写像について忠実であるから、 $\Phi = \Psi$ を示すために、 $J(\Phi) = J(\Psi)$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} J(\Psi) &= \sum_{a,b \in \Sigma} |a\rangle\langle b| \otimes \Psi(|a\rangle\langle b|) = \sum_{a,b \in \Sigma} (|a\rangle\langle b| \otimes \sum_{k=0}^{N-1} A_k |a\rangle\langle b| A_k^\dagger) \\ &= \sum_{a,b \in \Sigma} (|a\rangle\langle b| \otimes \sum_{k=0}^{N-1} (\sum_{a' \in \Sigma} |\phi_{k,a'}\rangle\langle a'|) |a\rangle\langle b| (\sum_{b' \in \Sigma} |b'\rangle\langle \phi_{k,b'}|)) \\ &= \sum_{a,b \in \Sigma} (|a\rangle\langle b| \otimes \sum_{k=0}^{N-1} |\phi_{k,a}\rangle\langle a| |a\rangle\langle b| |b\rangle\langle \phi_{k,b}|) = \sum_{a,b \in \Sigma} (|a\rangle\langle b| \otimes \sum_{k=0}^{N-1} |\phi_{k,a}\rangle\langle \phi_{k,b}|) \end{aligned}$$

= ... (次ページに続く)

2 → 3の証明 : Choi表現→Kraus表現

ΦをKraus表現で書く

Kraus行列のトレース保存条件を確認する

$$\dots = \sum_{a,b \in \Sigma} (|a\rangle\langle b| \otimes \sum_{k=0}^{N-1} |\phi_{k,a}\rangle\langle\phi_{k,b}|) \quad (\text{前ページの続き})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{a,b \in \Sigma} (|a\rangle \otimes \sum_{k=0}^{N-1} |\phi_{k,a}\rangle)(\langle b| \otimes \sum_{k=0}^{N-1} \langle\phi_{k,b}|) = \sum_{k=0}^{N-1} (\sum_{a \in \Sigma} |a\rangle \otimes |\phi_{k,a}\rangle)(\sum_{b \in \Sigma} \langle b| \otimes \langle\phi_{k,b}|) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = J(\Phi) \quad \dots (F) \end{aligned}$$

→ (F)について、Choi行列について $J(\Phi) = J(\Psi)$ が証明されたため、線形写像 $\Phi = \Psi$ が示された。

続けて、(D)で定義したKraus行列が、以下の条件を満たすことを示す。

$$\sum_{k=0}^{N-1} A_k^\dagger A_k = I_X \quad \dots (G)$$

2 → 3の証明 : Choi表現→Kraus表現

ΦをKraus表現で書く

Kraus行列のトレース保存条件を確認する

$$A_k = \sum_{a \in \Sigma} |\phi_{k,a}\rangle \langle a| \quad \cdots (D)$$

(D)について、(G)の成立を証明する。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} A_k^\dagger A_k &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(\sum_{b \in \Sigma} |b\rangle \langle \phi_{k,b}| \right) \left(\sum_{a \in \Sigma} |\phi_{k,a}\rangle \langle a| \right) \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{a,b \in \Sigma} |b\rangle \langle \phi_{k,b}| \phi_{k,a}\rangle \langle a| \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{a,b \in \Sigma} \langle \phi_{k,b} | \phi_{k,a} \rangle |b\rangle \langle a| \quad \cdots (H) \end{aligned}$$

また、Choi行列 $J(\Phi)$ について、出力系Yについての部分トレースを計算する。

$$\begin{aligned} J(\Phi) &= \sum_{k=0}^{N-1} |\psi_k\rangle \langle \psi_k| = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{a,b \in \Sigma} |a\rangle \langle b| \otimes |\phi_{k,a}\rangle \langle \phi_{k,b}| \\ \text{Tr}_Y(J(\Phi)) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{a,b \in \Sigma} \text{Tr}(|\phi_{k,a}\rangle \langle \phi_{k,b}|) |a\rangle \langle b| = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{a,b \in \Sigma} \langle \phi_{k,b} | \phi_{k,a} \rangle |a\rangle \langle b| \quad \cdots (I) \end{aligned}$$

2 → 3の証明：Choi表現→Kraus表現

ΦをKraus表現で書く

Kraus行列のトレース保存条件を確認する

(H)と(I)により、以下が成立する。

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k^\dagger A_k \right)^T = \text{Tr}_Y(J(\Phi)) \quad \cdots (J)$$

ここでChoi行列の性質で、 $\text{Tr}_Y(J(\Phi)) = I_X$ であることから、

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k^\dagger A_k \right)^T = I_X \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} A_k^\dagger A_k = I_X \quad \cdots (K)$$

よって、Kraus行列の性質である(G)も証明された。

【命題】

線形写像 Φ について、「2. Choi行列 $J(\Phi)$ があって、これが半正定値であり、かつ $\text{Tr}_Y(J(\Phi)) = I_X$ を満たす。」ならば「3. Φ のKraus表現が存在する。」

→ (F), (K)により、2 → 3が証明された。

3 → 4の証明：Kraus表現→Stinespring表現

Kraus表現を持つ線形写像 Φ について、Stinespring表現が存在することを証明する。

【命題】

線形写像 Φ について、「3. ΦのKraus表現が存在する。」

ならば「4. ΦのStinespring表現が存在する。」

線形写像 Φ について、(E)と(G)の成立を前提とし、Stinespring表現が1つ存在することを示す。

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \rho A_k^\dagger \quad \cdots (E), \quad \sum_{k=0}^{N-1} A_k^\dagger A_k = I_X \quad \cdots (G)$$

まずは以下の条件で、Workspace系WとGarbage系Gを定義する。

- ・ Garbage系Gは古典的状態集合 $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ を持つ。
- ・ Xの古典的状態数 n , Yの古典的状態数 m について、 $d = mn/n$ が整数であるようにする。

このとき、系Wの古典的状態集合を $\{0, 1, 2, \dots, d-1\}$ とする。

※Kraus行列の総数 N はいくらでも大きい任意の値を取れるため、 d が整数であるようにできる。

3 → 4の証明：Kraus表現→Stinespring表現

ユニタリ行列 U を以下のように定義する。

※まずは U がユニタリであると仮定し、後でユニタリ行列とすることが可能であると示す。

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{d-1} |k\rangle\langle j| \otimes M_{k,j} = \begin{pmatrix} M_{0,0} & \cdots & M_{0,d-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N-1,0} & \cdots & M_{N-1,d-1} \end{pmatrix} \quad \cdots (L)$$

ただし、 $M_{k,j}$ は行数 m , 列数 n の行列であるとする。

※このとき、 U は正方行列である。実際、行数は $N \times m = mN$, 列数は $d \times n = \frac{mN}{n} \times n = mN$ で一致。

以下、任意の k について $M_{k,0} = A_k$ (Kraus行列) とする。

その他の $M_{k,j} (j > 0)$ は、 U がユニタリであることを満たすように任意に選定する。(20pで説明)

ここで、以下のような式変形を考えて(M)と(N)を得る。

$$U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger = U(|0\rangle_W \otimes I_X)(I_W \otimes \rho)(\langle 0|_W \otimes I_X)U^\dagger \quad \cdots (M)$$

$$U(|0\rangle_W \otimes I_X) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{d-1} |k\rangle\langle j| \otimes M_{k,j} \right) (|0\rangle_W \otimes I_X) = \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \otimes M_{k,0} = \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \otimes A_k \quad \cdots (N)$$

3 → 4の証明：Kraus表現→Stinespring表現

$$U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger = U(|0\rangle_W \otimes I_X)(I_W \otimes \rho)(\langle 0|_W \otimes I_X)U^\dagger \quad \cdots (M)$$

$$U(|0\rangle_W \otimes I_X) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{d-1} |k\rangle\langle j| \otimes M_{k,j} \right) (|0\rangle_W \otimes I_X) = \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \otimes M_{k,0} = \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \otimes A_k \quad \cdots (N)$$

(N)を(M)に代入することで、(O)を得る。

$$U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \otimes A_k \right) (I_W \otimes \rho) \left(\sum_{j=0}^{N-1} \langle j| \otimes A_j^\dagger \right) = \sum_{k,j=0}^{N-1} |k\rangle\langle j| \otimes A_k \rho A_j^\dagger \quad \cdots (O)$$

(O)について、テンソル積の左側がGarbage系Gの系(大きさN)、右側が出力系Yの系(大きさm)であることから、(O)についてGarbage系Gについての部分トレースを取ると、(P)を得る。

$$\text{Tr}_G(U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger) = \sum_{k,j=0}^{N-1} \text{Tr}(|k\rangle\langle j|) A_k \rho A_j^\dagger = \sum_{k,j=0}^{N-1} \langle j|k\rangle A_k \rho A_j^\dagger = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \rho A_k^\dagger = \Phi(\rho) \quad \cdots (P)$$

(P)より、Kraus表現で表される写像Φを、Stinespring表現で書けることがわかる。

3 → 4の証明 : Kraus表現 → Stinespring表現

$$\mathrm{Tr}_G(U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \rho A_k^\dagger = \Phi(\rho) \quad \cdots (P)$$

ただし、(L)のようなユニタリ行列 U が本当に存在するのかを未だ証明していない。
このことを証明することで 3 → 4の証明を完了とする。

$a \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ としたとき、以下のベクトル $|\gamma_a\rangle$ を考える。

$$|\gamma_a\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \otimes A_k |a\rangle \quad \cdots (Q)$$

ここで、 $A_k |a\rangle$ は A_k の第 a 列を抜き出した列ベクトルであるため、(R)のように書ける。

$$(A_k |0\rangle, A_k |1\rangle, \dots, A_k |n-1\rangle) = A_k \quad \cdots (R)$$

3 → 4の証明 : Kraus表現→Stinespring表現

$$|\gamma_a\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \otimes A_k |a\rangle \quad \cdots (Q)$$

$$(A_k|0\rangle, A_k|1\rangle, \dots, A_k|n-1\rangle) = A_k \quad \cdots (R)$$

つまり、以下のように a について $|\gamma_a\rangle$ を列方向に並べた行列を考えると、(S)を得る。

$$(|\gamma_0\rangle, |\gamma_1\rangle, \dots, |\gamma_{n-1}\rangle) = \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \otimes (A_k|0\rangle, A_k|1\rangle, \dots, A_k|n-1\rangle) = \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \otimes A_k = \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{N-1} \end{pmatrix} \quad \cdots (S)$$

よって、 $(|\gamma_0\rangle, |\gamma_1\rangle, \dots, |\gamma_{n-1}\rangle)$ は、行列 U の第1~ n 列目であることがわかる。

あとは行列 U の残り第 $(n+1) \sim mN$ 列目までを、 U がユニタリとなるように埋められることを示す。

ここで、 $(|\gamma_0\rangle, |\gamma_1\rangle, \dots, |\gamma_{n-1}\rangle)$ について、以下(T)が成立する。

$$\begin{aligned} \langle \gamma_a | \gamma_b \rangle &= \sum_{k,j=0}^{N-1} \langle k | j \rangle \langle a | A_k^\dagger A_j | b \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle a | A_k^\dagger A_k | b \rangle = \langle a | \sum_{k=0}^{N-1} A_k^\dagger A_k | b \rangle \\ &= \langle a | b \rangle = \begin{cases} 1 & (a = b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases} \quad \cdots (T) \end{aligned}$$

3 → 4の証明：Kraus表現→Stinespring表現

$$\langle \gamma_a | \gamma_b \rangle = \langle a | b \rangle = \begin{cases} 1 & (a = b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases} \quad \cdots (T)$$

(T)の結果は、 n 個のベクトル $(|\gamma_0\rangle, |\gamma_1\rangle, \dots, |\gamma_{n-1}\rangle)$ が、 n 次元の正規直交系であることを示す。

そして、**Gram-Schmidt**の正規直交化法により、新たな正規化したベクトル $|\gamma_n\rangle, |\gamma_{n+1}\rangle, \dots, |\gamma_{mN-1}\rangle$ を作っていくことで、 mN 次元の正規直交系 $(|\gamma_0\rangle, |\gamma_1\rangle, \dots, |\gamma_{n-1}\rangle, |\gamma_n\rangle, \dots, |\gamma_{mN-1}\rangle)$ を得られる。

よって、行列 U を以下のように定義すれば、これはユニタリ行列である。

$$U = (|\gamma_0\rangle, |\gamma_1\rangle, \dots, |\gamma_{n-1}\rangle, |\gamma_n\rangle, \dots, |\gamma_{mN-1}\rangle) \quad \cdots (U)$$

よって、(P)が証明され、かつ前提である(U)も証明された。

【命題】

線形写像 Φ について、「3. Φ のKraus表現が存在する。」

ならば「4. Φ のStinespring表現が存在する。」

→(P)かつ(U)により、3 → 4が証明された。

4 → 1の証明：Stinespring表現→チャネル

Stinespring表現で表される線形写像が、チャネルであることを証明する。

【命題】

線形写像 Φ について、「4. Φ のStinespring表現が存在する。」

ならば「1. Φ は系 $X \rightarrow Y$ のチャネルである。」

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_G(U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger) \quad \dots (V)$$

ρ が系 X の密度行列ならば、(V)で書ける $\Phi(\rho)$ が Y の密度行列であることを証明すれば良い。

しかし、これは明らかである。



【第6回】Stinespring表現を表す回路

初期状態 $|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho$ は密度行列。

→ユニタリ変換はチャネルであるから、

$U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger$ も密度行列。

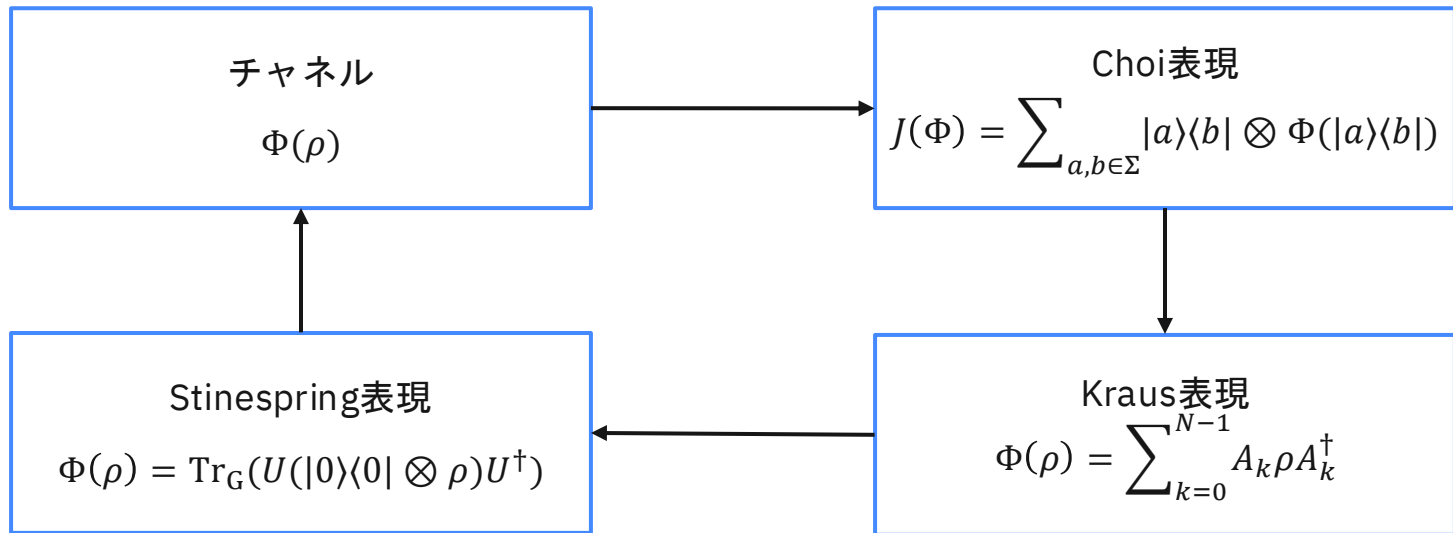
→部分トレースを取ると縮約状態が得られるから、

$\text{Tr}_G(U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger)$ も密度行列。

4 → 1が証明された。

まとめ

今回は3つのチャネル表現が数学的に同値であり、またチャネルの性質を正しく表現していることを証明した。



今回証明したこと