

Quantum channel basics

量子チャネルの基礎

2026/07/06

Ryota Maeda

量子情報の一般的定式化

第5回 量子チャネル - 量子チャネルの基礎

元の教材 IBM Quantum Learning:

<https://quantum.cloud.ibm.com/learning/ja/courses/general-formulation-of-quantum-information/quantum-channels/quantum-channel-basics>

Foundations of quantum computing

Course series

Quantum Information & Computation with John Watrous



Course 1

Basics of Quantum Information

Learn about quantum information, from states and measurements to quantum circuits and entanglement.

15 hours

Course 2

Fundamentals of Quantum Algorithms

Learn how quantum algorithms beat classical algorithms for problems including integer factoring and search.

15 hours

Course 3

General Formulation of Quantum Information

Dive deeper into quantum information, including density matrices, channels, and general measurements.

15 hours

Course 4

Foundations of Quantum Error Correction

Learn how quantum computations can be protected against noise through quantum error correcting codes and fault tolerance.

15 hours

Quantum Tokyo の和訳:

<https://quantum-tokyo.github.io/introduction/courses/general-formulation-of-quantum-information/density-matrices/multiple-systems-ja.html>



Quantum Tokyo へようこそ

学習コンテンツ

Qiskit の始め方

IBM Quantum Platform 教材

日本語訳

ユーティリティ・スケー

量子情報の一般的定式化

General formulation of quantum information

source: <https://quantum.cloud.ibm.com/learning/ja/courses/general-formulation-of-quantum-information>

密度行列

[はじめに](#)

1. 密度行列の基礎 (📄 解説スライド)
2. 密度行列の凸結合 (📄 解説スライド)
3. [ブロッホ球](#)
4. [複数システムと縮約状態](#)

量子チャネル

アジェンダ

本日の目標：チャネルの概要と定義、写像がチャネルであることの条件、チャネルたちの凸結合やチャネルの代表的な例について学習します。

アジェンダ

1. 復習 (4-6)
2. チャネルの概要 (7-8)
3. チャネルの定義 (9-14)
4. ユニタリ操作で定まるチャネル (15-17)
5. チャネルの凸結合 (18-19)
6. 量子ビットチャネルの例 (20-25)
7. まとめ (26-27)

本日の到達点

- チャネルの概要と定義を把握します。
- 写像がチャネルであるための条件を確認します。
- チャネルたちから新しいチャネルを作る方法や、チャネルの代表的な例を理解します。

1. 復習

復習 1/2

第1回から第4回まで以下の内容を学んできました。

・第1～3回

第1回「密度行列の基礎」

- ✓ 密度行列の性質
- ✓ 密度行列の要素と意味合い
- ✓ 量子状態ベクトルと密度行列

第2回「密度行列の凸結合」

- ✓ 密度行列の確率的選択
- ✓ 完全混合状態
- ✓ 確率的状態
- ✓ 密度行列とスペクトル定理

第3回「ブロッホ球」

- ✓ 球面上の点としての量子ビット状態
- ✓ 6つの重要な例
- ✓ 点の凸結合

まとめ

密度行列の基礎まとめ

密度行列の性質

トレースが1: $\text{Tr}(\rho) = 1$
* 状態の確率の総和が1である

半正定値であること
Positive semidefiniteness: $\rho \geq 0$

密度行列の要素と意味合い ⇒ 密度行列が量子情報の数学的構造全体を自然に導く

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \cdots & \alpha_{0,n-1} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1,0} & \alpha_{n-1,1} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

• 対角成分: 標準基底で測定したときに各古典状態が出現する確率を示す (和は1)

• 非対角成分: 行と列に対する2つの古典状態が、どの程度「量子的な重ね合わせ」に入っているか、またそれらの間の相対位相もあらわす

量子状態ベクトルと密度行列

純粋状態での量子状態ベクトル $|\psi\rangle$ について密度行列は次のように表される
$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

1. Introduction
2. 密度行列の基礎
1. 定義
1-① 行列の外積
1-② 半正定値行列
1-③ 密度行列の解釈
11. 量子状態ベクトルとの関係
3. まとめ

Quantum Tokyo

まとめ

ランダムな量子状態を表現する自然な方法が密度行列の凸結合となります。

【密度行列の凸結合】

①密度行列の確率的選択 ランダムな量子状態は 密度行列の凸結合で表現できます。

②完全混合状態 異なる準備方法でも同じ密度行列になり、観測では区別できません。

③確率的状態 対角密度行列では、対角成分が古典確率分布として解釈できます。

④密度行列とスペクトル定理 任意の密度行列はスペクトル分解により純粋状態の確率混合として理解できます。

Quantum Tokyo

Qt

16

まとめ

量子ビットの純粋状態が $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$ (ここで $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$) のとき、その密度行列は、 $|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(1 + (\sin\theta\cos\phi)\sigma_x + (\sin\theta\sin\phi)\sigma_y + (\cos\theta)\sigma_z)$

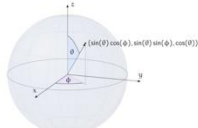
• すべての量子ビットの純粋状態 $|\psi\rangle$ の対応する点 $(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ が、ブロッホ球の球面となる。

• 直交する2つの状態は、球の中心をはさんで反対側に位置する。

• ブロッホ球上の点の凸結合は、量子ビットの混合状態を表し、ブロッホ球内部にある。

• 混合状態のブロッホ球体での座標は、元の純粋状態の確率による加重平均 (重心) になる。

Quantum Tokyo



Qt

復習 2/2

第1回から第4回まで以下の内容を学んできました。

- ・ 第4回

第4回「複数システムと縮約状態」

- ✓ 複数系の密度行列
- ✓ 積状態
- ✓ 相関状態
- ✓ 縮約状態
- ✓ 部分トレース
- ✓ 2量子ビットの例

まとめ

複数系の密度行列を扱い、系全体の状態から部分系の状態（縮約状態）を部分トレースで求められるようになりました。

- ✓ 密度行列は、状態ベクトルと同じように複数の量子系を表現できます。
- ✓ 積状態 ($\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$) は相関のない状態を表します。
- ✓ 可分状態は古典確率で説明できる相関、エンタングル状態は古典確率で説明できない相関です。
- ✓ 実際には観測者が系全体ではなく部分系にしかアクセスできないことが多いため、部分系の状態（縮約状態）を考えることは重要です。
- ✓ 縮約状態は部分トレース $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$ 、 $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB})$ によって求められます。

2. チャネルの概要

チャネルとはどのようなものか

(量子)チャネルとは、量子状態に対する操作を表す写像である。

チャネルにはどのようなものがあるか

- ユニタリゲートや量子回路に対応する操作（有用なもの）
- 雑音と見なせる演算（なるべく避けたいもの）
- 標準測定

なぜチャネルと呼ぶのか

情報理論において研究される、雑音が含まれる通信チャネルが由来である。

しかし量子状態におけるチャネルは、通信とは無関係である複雑な量子計算のような、様々な対象を指す。

3. チャネルの定義

定義（量子チャネル）

量子チャネルとは、以下の2つの条件を満たす写像のことである。

1. 線形写像である。
2. 密度行列を密度行列にうつす。

以下では、量子チャネルのことを単にチャネルという。

チャネルの定義 2/5

定義（線形写像）

X を集合とする。

X を定義域に持つ写像 Φ が線形写像であるとは、 Φ が以下の2つの条件を満たすことである。

1. 任意の $A, B \in X$ に対して、 $\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B)$ が成り立つ。
2. 任意の複素数 α と任意の $A \in X$ に対して、 $\Phi(\alpha A) = \alpha\Phi(A)$ が成り立つ。

チャネルによる状態の変化

X を、密度行列 ρ によって量子状態が記述される量子系とする。

Φ を、 X を入力系とするチャネルとする。

すなわち、 Φ の定義域は X であるとする。

$\Phi(\rho)$ が属する範囲によって、以下の2つの場合が考えられる。

- $\Phi(\rho) \in X$ のとき
 X の中において、チャネルによって量子状態が ρ から $\Phi(\rho)$ に変化したと考えられる。
- $\Phi(\rho) \notin X$ のとき
 $\Phi(\rho) \in Y$ とすると、チャネルによって量子状態が ρ から $\Phi(\rho)$ に変化したのみでなく、量子状態を考える系が X から Y へ変化したと考えられる。

チャネルの線形性に関する確認

確率論、および密度行列についてこれまで学んだことと矛盾しないために、チャネルが密度行列の凸結合に対して線形に作用することを確認する。 Φ を、 X を入力系とするチャネルとする。

量子状態は R または S のいずれか一方のみを取るとし、各量子状態に対応する密度行列を ρ および σ とする。 ($\rho, \sigma \in X$.)

X の量子状態が R である確率を p とする。 ($p \in [0, 1]$.)

以下の2つの場合について、最終的な結果が一致する必要がある。

- X の各要素に対して Φ を適用してから重み付き平均を取るとき
 X の量子状態が R なら、 Φ を適用すると密度行列は $\Phi(\rho)$ となり、この確率は p である。
 X の量子状態が S なら、 Φ を適用すると密度行列は $\Phi(\sigma)$ となり、この確率は $1 - p$ である。
よって密度行列の重み付き平均は、 $p\Phi(\rho) + (1 - p)\Phi(\sigma)$ である。
- X の要素たちについて重み付き平均を取ってから Φ を適用するとき
 X の量子状態に対応する密度行列は、重み付き平均を用いて $p\rho + (1 - p)\sigma$ と表せる。
この密度行列に対して Φ を適用することにより、出力として $\Phi(p\rho + (1 - p)\sigma)$ を得る。

この2つが一致する必要があるため $p\Phi(\rho) + (1 - p)\Phi(\sigma) = \Phi(p\rho + (1 - p)\sigma)$ であり、 Φ はたしかに線形である。

チャネルの定義 4/5

チャネルは密度行列を密度行列にうつす

チャネル Φ を密度行列 ρ に適用して得られる $\Phi(\rho)$ について、 $\Phi(\rho)$ を量子状態として扱うためには、 $\Phi(\rho)$ が密度行列になっている必要がある。

以下では、より一般的な状況を考える。

何も起こらない付加的な量子系 Z を導入した上で、チャネル Φ が量子系 X を量子系 Y にうつす場合を考える。

このときチャネル Φ により、量子状態の組 (Z, X) が量子状態の組 (Z, Y) にうつされる。

単純化のため、 m を正の整数として、 $Z = \{1, 2, \dots, m\}$ とする。

このとき量子状態の組 (Z, X) を表す任意の密度行列 ρ は、

$$\rho = \sum_{a=0}^{m-1} \sum_{b=0}^{m-1} |a\rangle\langle b| \otimes \rho_{a,b} = \begin{pmatrix} \rho_{0,0} & \cdots & \rho_{0,m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m-1,0} & \cdots & \rho_{m-1,m-1} \end{pmatrix}$$

の形に書くことができる。

右辺の各 $\rho_{a,b}$ は複素数を成分とする正方行列であるため、 ρ は全体として大きな正方行列である。

各 $\rho_{a,b}$ は X の古典状態に対応する行と列を持ち、単位行列 I_X を用いて

$$\rho_{a,b} = (\langle a| \otimes I_X) \rho (|b\rangle \otimes I_X)$$

と表せる。

各 $\rho_{a,b}$ は密度行列ではないが、それらを並べた ρ は密度行列になっている。

組 (Z, X) にチャネル Φ を適用すると、組 (Z, Y) の量子状態は

$$(\text{Id}_Z \otimes \Phi)(\rho) = \sum_{a=0}^{m-1} \sum_{b=0}^{m-1} |a\rangle\langle b| \otimes \Phi(\rho_{a,b}) = \begin{pmatrix} \Phi(\rho_{0,0}) & \cdots & \Phi(\rho_{0,m-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(\rho_{m-1,0}) & \cdots & \Phi(\rho_{m-1,m-1}) \end{pmatrix}$$

と表される。

ここで Id_Z は恒等チャネル、つまり何も変化させない写像を表す。

チャネルの定義 5/5

定理 (密度行列が密度行列にうつされるための必要十分条件)

チャネルの定義の2つ目(密度行列を密度行列にうつすこと)について、有用な定理(判定法)を紹介する。

線形写像 Φ が密度行列を密度行列にうつすためには、 Φ が以下の2つの条件を満たすことが必要十分である。

1. トレースを保つ。
2. 半正定値である。

定式化における演算の類似性

古典情報および量子情報の定式化について、以下の演算における類似性が成り立っている。

- 古典情報の標準的定式化：確率行列
- 量子情報の単純な定式化：ユニタリ行列
- 量子情報の精密な定式化：チャネル

4. ユニタリ操作で定まるチャネル

ユニタリ操作で定まるチャネル 1/2

定義（ユニタリ行列による共役化で定まるチャネル）

X を量子系、 U をユニタリ行列とする。

U による X への共役を表すチャネル Φ は、 X の量子状態を表す任意の密度行列 ρ に対して

$$\Phi(\rho) = U\rho U^\dagger$$

と定義される。

ここで $U^\dagger$ は U の随伴行列(つまり共役転置行列)を表す。

ρ を $U\rho U^\dagger$ にうつす操作を、 U による共役化という。

ユニタリ行列による共役化の定義の正当性の確認

$|\psi\rangle$ を量子状態ベクトル、 U をユニタリ行列とする。

U を $|\psi\rangle$ に適用すると、量子状態ベクトルは $U|\psi\rangle$ となり、対応する密度行列は

$$(U|\psi\rangle)(U|\psi\rangle)^\dagger = U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger$$

となる。

一方で、 ρ を $|\psi\rangle$ を表す密度行列とすると、 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ である。

Φ を U による共役化を表すチャネルとすると、

$$\Phi(\rho) = U\rho U^\dagger = U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger$$

となり、上の結果と一致する。

定義（恒等チャネル）

X を量子系とする。

X におけるユニタリ行列による共役化において、特に $U = I$ とおいたときのチャネルを Id_X と表し、恒等チャネルという。

Id_X は、 X における任意の密度行列 ρ に対して、 $\text{Id}_X(\rho) = \rho$ を満たす。

恒等チャネルは(面白くないように見えるが実は)たいへん重要なチャネルである。

恒等チャネルは送信者から受信者へノイズの無い完全な情報伝達を表すという意味において、完全チャネルともよばれる。

ユニタリ操作で定まるチャネル 2/2

ユニタリ行列による共役化で定まる写像がチャネルであることの確認

X を量子系の組、 U をユニタリ行列とする。

X の量子状態を表す密度行列 ρ に対して、写像 Φ を $\Phi(\rho) = U\rho U^\dagger$ により定める。

何も起こらない付加的な量子系 Z を導入した上で、チャネル Φ を量子系の組 (Z, X) に適用すると考える。

Φ がチャネルとしての条件を満たしていることを確かめる。

- 線形写像である

U および $U^\dagger$ は行列であるので、それらを掛ける写像は線形である。

- 密度行列を密度行列にうつす

$\Phi(\rho) = U\rho U^\dagger = (\text{Id}_Z \otimes U)\rho(\text{Id}_Z \otimes U^\dagger)$ と表せる。

$\Phi(\rho)$ が密度行列であることを確かめる。

- トレースを保つ

ρ は密度行列であるので、 $\text{Tr}(\rho) = 1$ であり、

$$\text{Tr}(\Phi(\rho)) = \text{Tr}((\text{Id}_Z \otimes U)\rho(\text{Id}_Z \otimes U^\dagger)) = \text{Tr}((\text{Id}_Z \otimes U^\dagger)(\text{Id}_Z \otimes U)\rho) = \text{Tr}((\text{Id}_Z \otimes \text{Id}_X)\rho) = \text{Tr}(\rho) = 1 \text{ である。}$$

- 半正定値である

ρ は密度行列であるので、量子状態ベクトル M を用いて、 $\rho = M^\dagger M$ と表せる。

$$\Phi(\rho) = (\text{Id}_Z \otimes U)M^\dagger M(\text{Id}_Z \otimes U^\dagger) = (M(\text{Id}_Z \otimes U^\dagger))^\dagger (M(\text{Id}_Z \otimes U^\dagger)) \text{ と表せるので、これは半正定値である。}$$

よって Φ はチャネルである。

トレースの巡回性
 $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$
を利用する

U はユニタリ行列である
ので、 $U^\dagger U = I$ である

$M' = M(\text{Id}_Z \otimes U^\dagger)$ とおくと、 $\Phi(\rho) = (M')^\dagger M'$ と表せる

5. チャネルの凸結合

チャネルの凸結合 1/1

定義 (チャネルの凸結合)

二つのチャネル Φ_0 と Φ_1 が、同じ入力系および出力系を持つとする。

$p \in [0, 1]$ に対して、確率 p で Φ_0 を適用し、確率 $1 - p$ で Φ_1 を適用することにより、新しいチャネル $\Phi = p\Phi_0 + (1 - p)\Phi_1$ が定まる。

任意の密度行列 ρ に対して、 $\Phi(\rho) = p\Phi_0(\rho) + (1 - p)\Phi_1(\rho)$ である。

より一般に、 m を正の整数として、チャネルたち $\Phi_0, \dots, \Phi_{m-1}$ と確率ベクトル $(p_0, \dots, p_{m-1})$ が与えられているとする。

このとき、新しいチャネル $\Phi = p_0\Phi_0 + \dots + p_{m-1}\Phi_{m-1}$ を定めることができる。

Φ をチャネルたち $\Phi_0, \dots, \Phi_{m-1}$ の凸結合という。

Φ は常にチャネルとしての条件を満たすことが証明できる。

チャネルの凸結合の例 (混合ユニタリチャネル、パウリチャネル)

ユニタリ行列たち $U_0, \dots, U_{m-1}$ と確率ベクトル $(p_0, \dots, p_{m-1})$ が与えられているとする。

これらの凸結合として新しいチャネル Φ が、 ρ を任意の密度行列として

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k U_k \rho U_k^\dagger$$

により定められる。

Φ を混合ユニタリチャネルという。

特に各 U_k がパウリ行列またはパウリ行列のテンソル積であるとき、 Φ をパウリチャネルという。

パウリチャネルは量子計算において重要である。

6. 量子ビットチャネルの例

量子ビットチャネルの例 1/5

定義（量子ビットチャネル）

チャネルの入力系と出力系がともに単一の量子ビットであるとき、**量子ビットチャネル**という。

量子ビットチャネルの例

以下の3つの量子ビットチャネルについて説明する。

1. 量子ビットリセットチャネル：量子ビットの**リセット**を実現するチャネル。
2. 完全位相緩和チャネル：完全な**位相緩和**を実現するチャネル。
3. 完全脱分極チャネル：完全な**脱分極**を実現するチャネル。

※用語の説明

- ・リセット：量子状態が $|0\rangle$ に初期化されること。
- ・位相緩和：量子状態が $|0\rangle$ または $|1\rangle$ (つまり古典的な状態)に変化すること。
- ・脱分極：量子状態が完全混合状態(つまり $I/2$)に変化すること。

	完全位相緩和	完全脱分極
変化	重ね合わせだけ壊れる	情報が完全に失われる
密度行列の対角成分	変わらない	全て $1/2$ に変化する
古典的な情報	残る	失われる
入力と出力	入力によって出力が変わる	入力にかかわらず出力が一定

量子ビットチャネルの例 2/5

量子ビットチャネルの例1(量子ビットリセットチャネル)

任意の量子ビットを $|0\rangle$ に戻すチャネルを、量子ビットリセットチャネルという。

量子ビットリセットチャネル Λ は、密度行列 ρ に対して

$$\Lambda(\rho) = \text{Tr}(\rho)|0\rangle\langle 0|$$

により定められる。

$\text{Tr}(\rho) = 1$ であるが、このように明示的に表記することにより、 Λ は ρ に適用される写像であることが分かる。

量子もつれ状態に対する量子ビットリセットチャネルの適用

A, B を量子ビットとし、組 (A, B) は量子もつれ状態、つまりベル状態 $|\phi^+\rangle$ であるとする。

密度行列として、この状態は

$$|\phi^+\rangle\langle\phi^+| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|0\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|$$

と表せる。

量子ビットリセットチャネル Λ を A に適用し、 B には何もしないことによって、量子状態として

$$\frac{1}{2}\Lambda(|0\rangle\langle 0|) \otimes |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}\Lambda(|0\rangle\langle 1|) \otimes |0\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}\Lambda(|1\rangle\langle 0|) \otimes |1\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}\Lambda(|1\rangle\langle 1|) \otimes |1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| = |0\rangle\langle 0| \otimes \frac{I}{2}$$

を得る。

一見すると、 A をリセットしたことによって B が完全混合状態に変化したように見える。

しかし実際はそうではなく、 A がリセットされる前から B の縮約状態は完全混合状態であって、それは変化していない。

量子ビットチャネルの例 3/5

量子ビットチャネルの例2(完全位相緩和チャネル)

2×2 行列に対して、量子ビットチャネル Δ を

$$\Delta \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} \end{pmatrix}$$

により定める。

Δ は対角成分をそのまま残し、それ以外の成分を全て0にする写像である。

Δ を完全位相緩和チャネルという。

Δ は単一の量子ビットに限らず、任意の量子系に対して一般化することができる。

完全位相緩和チャネルの解釈

完全位相緩和チャネルの適用は、以下の2つの解釈を持つ。

1. デコヒーレンスを表す

量子的な重ね合わせ状態を壊し、古典的な確率状態に変換させる過程を表している。

2. 標準測定を表す

入力量子ビットが測定によって破棄され、出力量子ビットが測定後の状態になることを表している。

量子ビットチャネルの例 4/5

量子もつれ状態に対する完全位相緩和チャネルの適用

量子もつれ状態になっている2量子ビットの一方に対して、完全位相緩和チャネル Δ を適用する場合を考える。

A, B を量子ビットとし、組 (A, B) はベル状態 $|\phi^+\rangle$ であるとする。

2番目の量子ビット B に Δ を適用することにより、量子状態として

$$\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| \otimes \Delta(|0\rangle\langle 0|) + \frac{1}{2}|0\rangle\langle 1| \otimes \Delta(|0\rangle\langle 1|) + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 0| \otimes \Delta(|1\rangle\langle 0|) + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \otimes \Delta(|1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|$$

を得る。

ブロック行列を用いれば、この等式は

$$\begin{pmatrix} \Delta\left(\frac{1}{2} & 0\right) & \Delta\left(0 & \frac{1}{2}\right) \\ \Delta\left(0 & 0\right) & \Delta\left(0 & 0\right) \\ \Delta\left(0 & 0\right) & \Delta\left(0 & \frac{1}{2}\right) \\ \Delta\left(\frac{1}{2} & 0\right) & \Delta\left(0 & \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

と表すことができる。

完全でない位相緩和チャネル

量子ビットに対して、完全にではなく少しだけ位相緩和させるチャネルを考える。

$\varepsilon \in (0, 1)$ を、0ではないが小さい正の実数とする。

チャネル Δ_ε を、 $\Delta_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\text{Id} + \varepsilon\Delta$ によって定める。

Δ_ε により、密度行列 ρ は $\Delta_\varepsilon(\rho) = (1 - \varepsilon)\rho + \varepsilon\Delta(\rho)$ にうつされる。

つまり、確率 $1 - \varepsilon$ で何も起こらず、確率 ε で量子ビットが位相緩和される。

行列を使って表すと、密度行列 $\rho = \begin{pmatrix} \langle 0|\rho|0\rangle & \langle 0|\rho|1\rangle \\ \langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle \end{pmatrix}$ に対して

$$\Delta_\varepsilon(\rho) = \begin{pmatrix} \langle 0|\rho|0\rangle & (1 - \varepsilon)\langle 0|\rho|1\rangle \\ (1 - \varepsilon)\langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle \end{pmatrix}$$

となる。

量子ビットチャネルの例 5/5

量子ビットチャネルの例3(完全脱分極チャネル)

密度行列 ρ に対して、量子ビットチャネル Ω を

$$\Omega(\rho) = \text{Tr}(\rho) \frac{I}{2}$$

により定める。

$\text{Tr}(\rho) = 1$ であるが、このように明示的に表記することにより、 Λ は ρ に適用される写像であることが分かる。

Ω は任意の密度行列の入力に対して、完全混合状態(つまり $I/2$)を出力する写像である。

Ω を完全脱分極チャネルという。

Ω は単一の量子ビットに限らず、任意の量子系に対して一般化することができる。

完全でない脱分極チャネル

$\varepsilon \in (0, 1)$ を、0ではないが小さい正の実数とする。

確率 ε で脱分極が起こるチャネル Ω_ε を、密度行列 ρ に対して

$$\Omega_\varepsilon(\rho) = (1 - \varepsilon)\rho + \varepsilon\Omega(\rho)$$

によって定める。

位相緩和の場合と同様に、 Ω_ε は完全でない脱分極チャネルを表す。

7. まとめ

まとめ

チャネルの概要と定義、写像がチャネルであることの条件、チャネルたちの凸結合やチャネルの代表的な例について学習しました。

- ✓ チャネルとは、量子状態に対する操作を表す写像です。
- ✓ 写像がチャネルであるための条件は、線形であり、密度行列を密度行列にうつすことです。
- ✓ チャネルたちと確率ベクトルが与えられたとき、それらの凸結合によって新しいチャネルを作ることができます。
- ✓ チャネルには、ユニタリ行列により定まるチャネルや、様々な量子ビットチャネルがあります。

END