

3. Density matrices - Bloch sphere

密度行列 - ブロッホ球

2026/06/10

Kifumi Numata

量子情報の一般的定式化

第3回 密度行列 - ブロッホ球

元の教材 IBM Quantum Learning:

<https://quantum.cloud.ibm.com/learning/en/courses/general-formulation-of-quantum-information/density-matrices/bloch-sphere>

Foundations of quantum computing

The screenshot shows a course series page for 'Foundations of quantum computing' with John Watrous. It lists four courses:

- Course 1: Basics of Quantum Information** (15 hours): Learn about quantum information, from states and measurements to quantum circuits and entanglement.
- Course 2: Fundamentals of Quantum Algorithms** (15 hours): Learn how quantum algorithms beat classical algorithms for problems including integer factoring and search.
- Course 3: General Formulation of Quantum Information** (15 hours): Dive deeper into quantum information, including density matrices, channels, and general measurements. (This course is highlighted with a blue border in the original image.)
- Course 4: Foundations of Quantum Error Correction** (15 hours): Learn how quantum computations can be protected against noise through quantum error correcting codes and fault tolerance.

Quantum Tokyo の和訳:

<https://quantum-tokyo.github.io/introduction/courses/general-formulation-of-quantum-information/density-matrices/bloch-sphere-ja.html>

The screenshot shows the Quantum Tokyo website interface. At the top is the 'Qt' logo. The main heading is '量子情報の一般的定式化' (General formulation of quantum information). Below it, the source is cited as <https://quantum.cloud.ibm.com/learning/ja/courses/general-formulation-of-quantum-information>. The page lists the course '密度行列 はじめに' (Density Matrix Introduction) and provides a table of contents:

- 密度行列の基礎 (📄 解説スライド)
- 密度行列の凸結合 (📄 解説スライド)
- ブロッホ球
- 複数システムと縮約状態

Additional navigation options include '量子チャンネル' (Quantum Channel) and 'ユーティリティ・スケー' (Utility/Scale).

まとめ

密度行列の基礎まとめ

密度行列の性質

トレースが1: $\text{Tr}(\rho) = 1$
 *状態の確率の総和が1である

半正定値であること
 Positive semidefiniteness: $\rho \geq 0$

密度行列の要素と意味合い ⇒ 密度行列が量子情報の数学的構造全体を自然に導く

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \cdots & \alpha_{0,n-1} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1,0} & \alpha_{n-1,1} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

- 対角成分：標準基底で測定したときに各古典状態が出現する確率を示す (和は1)
- 非対角成分：行と列に対する2つの古典状態が、どの程度「量子的な重ね合わせ」に入っているか、またそれらの間の相対位相もあらわす

量子状態ベクトルと密度行列

- 純粋状態での量子状態ベクトル ψ について密度行列は次のように表される

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

1. Introduction

2. 密度行列の基礎

I. 定義

I-① 行列のトレース

I-② 半正定値行列

I-③ 密度行列の解釈

II. 量子状態ベクトルとの関係

3. まとめ

まとめ

ランダムな量子状態を表現する自然な方法が密度行列の凸結合となります。

【密度行列の凸結合】

- ①密度行列の確率的選択 ランダムな量子状態は、密度行列の凸結合で表現できます。
- ②完全混合状態 異なる準備方法でも同じ密度行列になり、観測では区別できません。
- ③確率的状態 対角密度行列では、対角成分が古典確率分布として解釈できます。
- ④密度行列とスペクトル定理 任意の密度行列はスペクトル分解により純粋状態の確率混合として理解できます。

ブロッホ球 (Bloch sphere)

1量子ビットの状態を表現するために有用な幾何学的手法

- 球面上の点としての量子ビット状態
- 6つの重要な例
- 点の凸結合

ブロッホ球 (Bloch sphere)

1量子ビットの状態を表現するための有用な幾何学的手法

- 球面上の点としての量子ビット状態
- 6つの重要な例
- 点の凸結合

量子ビットの量子状態ベクトル

量子ビットの量子状態ベクトル： $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ このとき、 α と β は複素数。

この状態は、 α を非負の実数とするベクトルに限定しても、グローバル位相を除いて等価な形に変形できるので、以下の式に変形できます。

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

ここで θ と ϕ は、 $\theta \in [0, \pi]$ 、 $\phi \in [0, 2\pi)$ の実数です。

この変形において、 θ と ϕ は、**ほぼ一意**に定まります。

- $\beta = 0$ の特別な場合、 $e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ より、 $\theta = 0$ となり、 ϕ は**任意**に選べる。
- $\alpha = 0$ の特別な場合、 $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ より、 $\theta = \pi$ となり、やはり ϕ は**任意**に選べる。
 $|\psi\rangle = e^{i\phi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)|1\rangle = e^{i\phi}|1\rangle$ より、任意の ϕ に対して、 $|\psi\rangle$ はグローバル位相を除いて $e^{i\phi}|1\rangle$ と同値のため。
- $\alpha \neq 0$ で $\beta \neq 0$ のとき、 (θ, ϕ) の組は**一意**に定まる。

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$$

量子ビットの密度行列

量子ビットの量子状態 $|\psi\rangle$ は以下のように書くことができ、

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)$$

この状態の密度行列表記は

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-i\phi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & e^{-i\phi} \sin\theta \\ e^{i\phi} \sin\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$$

Quantum Toky

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & (\cos\phi - i\sin\phi)\sin\theta \\ (\cos\phi + i\sin\phi)\sin\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$$

三角関数の倍角の公式から

オイラーの公式から

$$\cos^2(\theta/2) = \frac{1 + \cos(\theta)}{2},$$

$$\sin^2(\theta/2) = \frac{1 - \cos(\theta)}{2},$$

$$\cos(\theta/2) \sin(\theta/2) = \frac{\sin(\theta)}{2},$$

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

量子ビットの密度行列

量子ビットの量子状態 $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)$$

その密度行列（純粋状態）は：

$$\begin{aligned} |\psi\rangle\langle\psi| &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & (\cos\phi - i\sin\phi)\sin\theta \\ (\cos\phi + i\sin\phi)\sin\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathbb{I} + \sin(\theta) \cos(\phi)\sigma_x + \sin(\theta) \sin(\phi)\sigma_y + \cos(\theta)\sigma_z}{2} \end{aligned}$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

つまり、密度行列はパウリ行列の線形結合として表すことができます。

球面上の点としての量子ビット状態

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)$$

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{\mathbb{I} + (\sin\theta \cos\phi)\sigma_x + (\sin\theta \sin\phi)\sigma_y + (\cos\theta)\sigma_z}{2}$$

この式の分子における $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の係数はすべて実数なので、ベクトルとして表すことができます
(直交座標) :

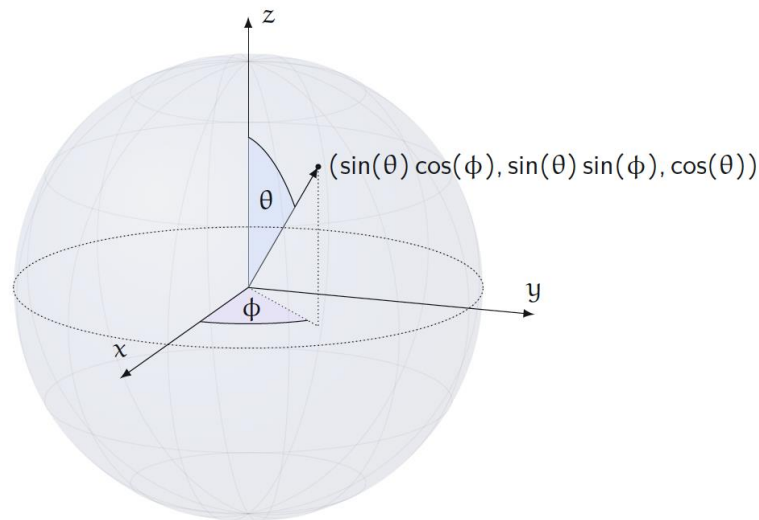
$$\begin{array}{ccc} (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) & \text{(単位ベクトルです)} \\ \text{X軸} & \text{Y軸} & \text{Z軸} \end{array}$$

また、球面座標を用いると :

$$(1, \theta, \phi)$$

↑ ↑ ↑
半径 極角 方位角

このベクトルは、右図の半径1の球の球面上の点を指します。



ブロッホ球

球を地球に見立てたとき、

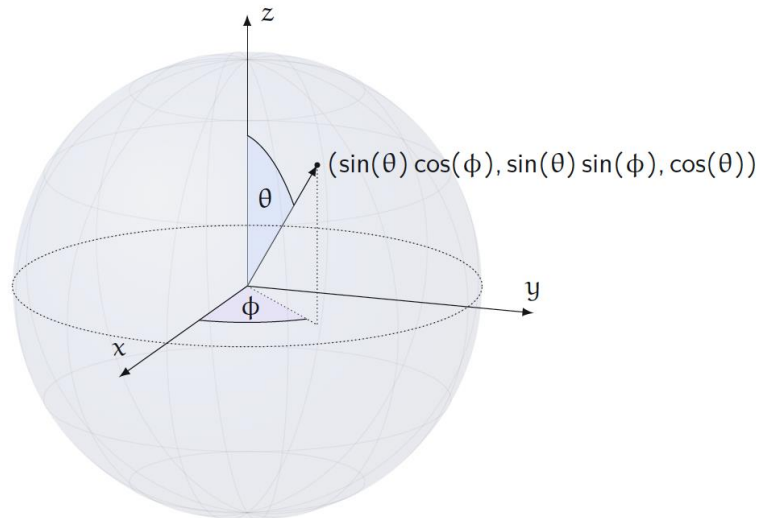
- 極角 θ ：北極から南へどれだけ回転してその点に到達するか。 $0 \leq \theta \leq \pi$
- 方位角 ϕ ：本初子午線から東へどれだけ回転するか。 $0 \leq \phi < 2\pi$
(本初子午線：正の x 軸を通り、球面上で北極から南極へつながる曲線)

すべての量子ビットの純粋状態の対応する点が、この3次元実空間内の球面になる → これがブロッホ球。
(この球面は、表面が2次元であることから単位2球面と呼ばれる。)

振り返り

- 純粋状態：量子状態が $|\psi\rangle$ のとき、その密度行列が $|\psi\rangle\langle\psi|$
- 混合状態：複数の量子状態が確率的に混じった状態。密度行列は $\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

つまり、これまで純粋状態のみについてみてきた。
混合状態については、のちほど紹介。



ブロッホ球 (Bloch sphere)

1量子ビットの状態を表現するために有用な幾何学的手法

- 球面上の点としての量子ビット状態
- 6つの重要な例
- 点の凸結合

標準基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

状態 $|0\rangle$ の密度行列は、

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{\mathbb{I} + \sigma_z}{2}$$

$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + (\sin\theta \cos\phi)\sigma_x + (\sin\theta \sin\phi)\sigma_y + (\cos\theta)\sigma_z)$ より

このブロッホ球上の点は、直交座標では $(x, y, z) = (0, 0, 1)$: つまり北極。
 $\cos\theta = 1$ で、 $\sin\theta \cos\phi = 0$ より、球面座標は $(1, \theta, \phi) = (1, 0, \phi)$ 。つまり ϕ は任意。

これは、 $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$ を用いた次の表記とも一致：

$$|0\rangle = \cos(0)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(0)|1\rangle$$

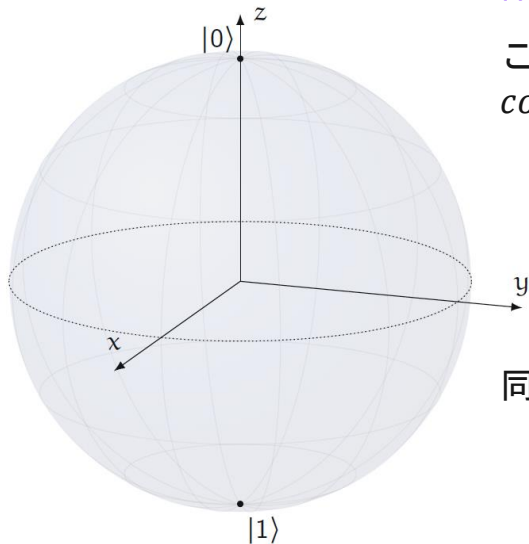
直感的には、極角 $\theta = 0$ なので、 $|0\rangle$ は北極に対応し、方位角 ϕ は意味なし。

同様に、状態 $|1\rangle$ の密度行列は

$$|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{\mathbb{I} - \sigma_z}{2}$$

- 直交座標 $(x, y, z) = (0, 0, -1)$: つまり南極。
- 球面座標 $(1, \theta, \phi) = (1, \pi, \phi)$ (ϕ は任意) $\cos\theta = -1$ より

極角 $\theta = \pi$ なので、 $|1\rangle$ は南極に対応し、ここでも方位角 ϕ は意味がない。



$\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 基底

$$|+\rangle\langle+| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{\mathbb{I} + \sigma_x}{2}$$

$$|-\rangle\langle-| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{\mathbb{I} - \sigma_x}{2}$$

$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + (\sin\theta \cos\phi)\sigma_x + (\sin\theta \sin\phi)\sigma_y + (\cos\theta)\sigma_z)$ より

- 直交座標 (x, y, z) : $(1, 0, 0)$ と $(-1, 0, 0)$ …つまり x 軸上の $+1$ と -1 の点
- 球面座標 $(1, \theta, \phi)$: $(1, \pi/2, 0)$ と $(1, \pi/2, \pi)$

なぜなら、 $\cos\theta = 0$ なので、 $\theta = \pi/2$

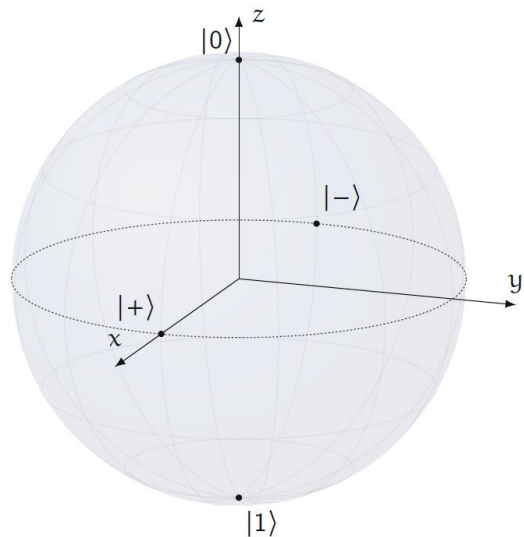
$\sin\theta \cos\phi = 1$ のとき、 $\cos\phi = 1$ より $\phi = 0$

$\sin\theta \cos\phi = -1$ のとき、 $\cos\phi = -1$ より $\phi = \pi$

これは、 $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$ のときの次の表記とも一致：

$$|+\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + e^{i0} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|-\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + e^{i\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$



$\{|+i\rangle, |-i\rangle\}$ 基底

$$|+i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle \text{ より}$$

$$|+i\rangle\langle+i| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{\mathbb{I} + \sigma_y}{2}$$

$$|-i\rangle\langle-i| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{\mathbb{I} - \sigma_y}{2}$$

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + (\sin\theta \cos\phi)\sigma_x + (\sin\theta \sin\phi)\sigma_y + (\cos\theta)\sigma_z) \text{ より}$$

- 直交座標 (x, y, z) : $(0, 1, 0)$ と $(0, -1, 0)$...つまり y 軸上の $+1$ と -1 の点。
- 球面座標 $(1, \theta, \phi)$: $(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ と $(1, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

なぜなら、 $\cos\theta = 0$ なので、 $\theta = \pi/2$

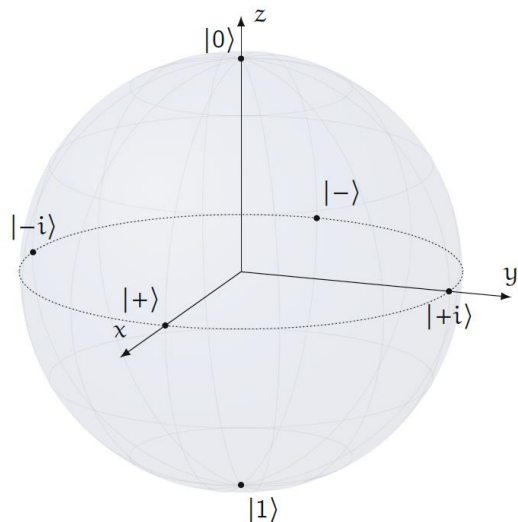
$\sin\theta \sin\phi = 1$ のとき、 $\sin\phi = 1$ より $\phi = \pi/2$

$\sin\theta \sin\phi = -1$ のとき、 $\sin\phi = -1$ より $\phi = \frac{3\pi}{2}$

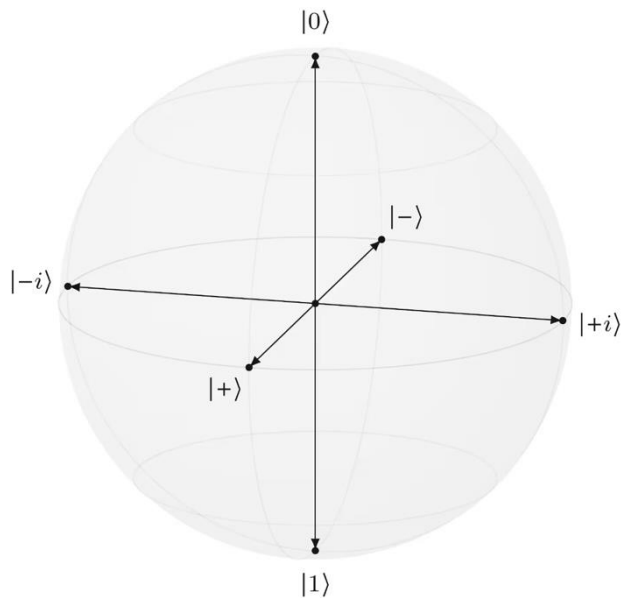
これは、 $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$ のときの次の表記とも一致 :

$$|+i\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|-i\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + e^{i\frac{3\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$$



6つの重要な例：まとめ



標準基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$|0\rangle = \cos(0)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(0)|1\rangle$$

$$|1\rangle = \cos(\frac{\pi}{2})|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\frac{\pi}{2})|1\rangle$$

$$|0\rangle\langle 0| = \frac{\mathbb{1} + \sigma_z}{2}$$

$$|1\rangle\langle 1| = \frac{\mathbb{1} - \sigma_z}{2}$$

$\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 基底

$$|+\rangle = \cos(\frac{\pi}{4})|0\rangle + e^{i0} \sin(\frac{\pi}{4})|1\rangle$$

$$|-\rangle = \cos(\frac{\pi}{4})|0\rangle + e^{i\pi} \sin(\frac{\pi}{4})|1\rangle$$

$$|+\rangle\langle +| = \frac{\mathbb{1} + \sigma_x}{2}$$

$$|-\rangle\langle -| = \frac{\mathbb{1} - \sigma_x}{2}$$

$\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 基底

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|+\rangle = \cos(\frac{\pi}{4})|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}} \sin(\frac{\pi}{4})|1\rangle$$

$$|-\rangle = \cos(\frac{\pi}{4})|0\rangle + e^{i\frac{3\pi}{2}} \sin(\frac{\pi}{4})|1\rangle$$

ブロッホ球の例

$|\psi_\alpha\rangle = \cos\alpha|0\rangle + \sin\alpha|1\rangle$ (ここで $\alpha \in [0, \pi)$) について考えてみます。

密度行列は $|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ \cos\alpha \cdot \sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} & \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ \frac{\sin 2\alpha}{2} & \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \sin 2\alpha \sigma_x + \cos 2\alpha \sigma_z)$$

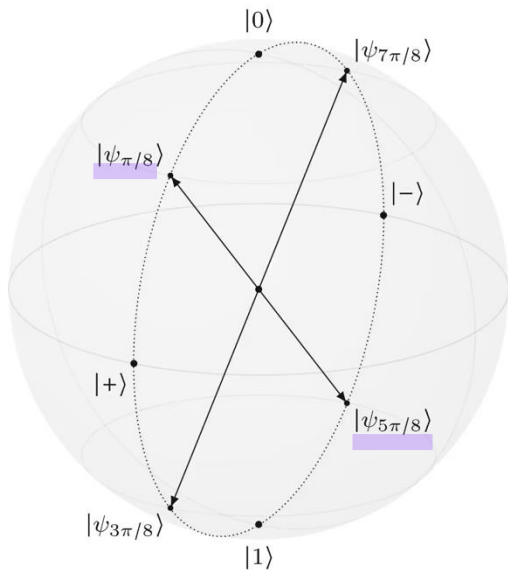
例えば、 α が以下の場合、

$\alpha = \pi/8$ のとき : $|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \sin \frac{\pi}{4} \sigma_x + \cos \frac{\pi}{4} \sigma_z) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z)$

- 直交座標 (x, y, z) : $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- 球面座標 $(1, \theta, \phi)$: $(1, \frac{\pi}{4}, 0)$

$\alpha = 5\pi/8$ のとき : $|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \sin \frac{5\pi}{4} \sigma_x + \cos \frac{5\pi}{4} \sigma_z) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z)$

- 直交座標 (x, y, z) : $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
- 球面座標 $(1, \theta, \phi)$: $(1, \frac{5\pi}{4}, 0)$

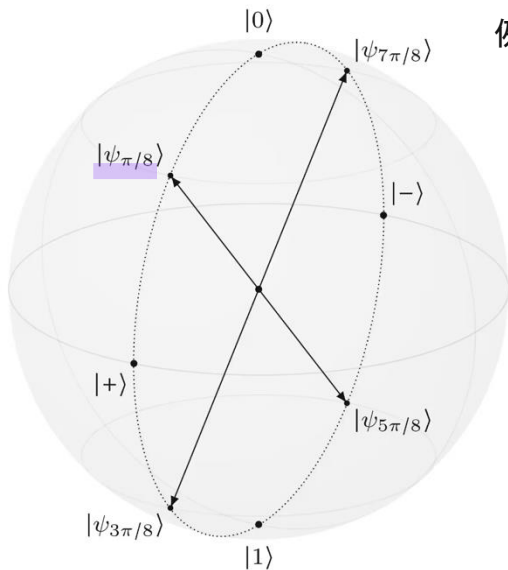


ブロッホ球の例

$|\psi_\alpha\rangle = \cos\alpha |0\rangle + \sin\alpha |1\rangle$ (ここで $\alpha \in [0, \pi)$) について考えてみます。

密度行列は $|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ \cos\alpha \cdot \sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} & \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ \frac{\sin 2\alpha}{2} & \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \sin 2\alpha \sigma_x + \cos 2\alpha \sigma_z)$$



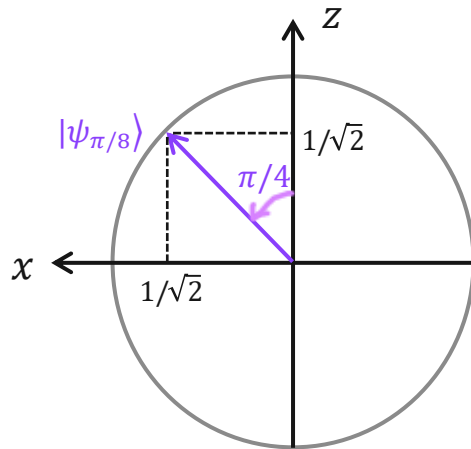
例えば、 α が以下の場合、

$\alpha = \pi/8$ のとき :

- 直交座標 (x, y, z) : $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- 球面座標 $(1, \theta, \phi)$: $(1, \frac{\pi}{4}, 0)$

$\alpha = 5\pi/8$ のとき :

- 直交座標 (x, y, z) : $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
- 球面座標 $(1, \theta, \phi)$: $(1, \frac{5\pi}{4}, 0)$

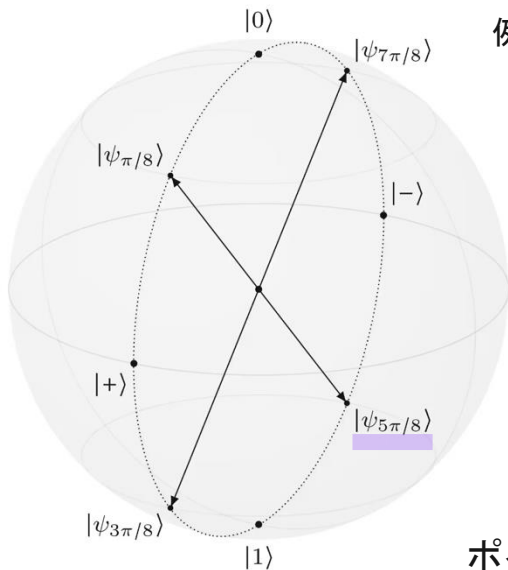


ブロッホ球の例

$|\psi_\alpha\rangle = \cos\alpha |0\rangle + \sin\alpha |1\rangle$ (ここで $\alpha \in [0, \pi)$) について考えてみます。

密度行列は $|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ \cos\alpha \cdot \sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} & \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ \frac{\sin 2\alpha}{2} & \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \sin 2\alpha \sigma_x + \cos 2\alpha \sigma_z)$$



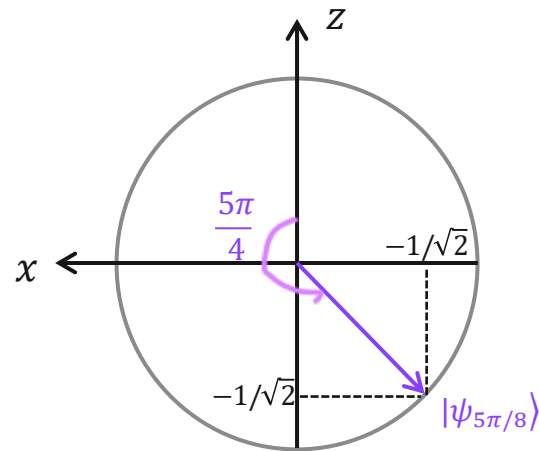
例えば、 α が以下の場合、

$\alpha = \pi/8$ のとき :

- 直交座標 (x, y, z) : $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- 球面座標 $(1, \theta, \phi)$: $(1, \frac{\pi}{4}, 0)$

$\alpha = 5\pi/8$ のとき :

- 直交座標 (x, y, z) : $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
- 球面座標 $(1, \theta, \phi)$: $(1, \frac{5\pi}{4}, 0)$



ポイント : 密度行列からブロッホ球上のベクトルを求めると座標がわかる

ブロッホ球 (Bloch sphere)

1量子ビットの状態を表現するために有用な幾何学的手法

- 球面上の点としての量子ビット状態
- 6つの重要な例
- 点の凸結合

ブロッホ球上の点の凸結合

密度行列の凸結合と同様に、ブロッホ球上の点の凸結合をとることで、量子ビットの密度行列を表現できます。

第2回「密度行列の凸結合」より

【凸結合のイメージ】

凸結合は「**ランダムさ**」を表す数学的道具になります。

- 凸結合とは、確率を使った重み付き平均です。
- 結果は必ず「元の値の間」に入ります。
- 係数は非負で和が1となります。

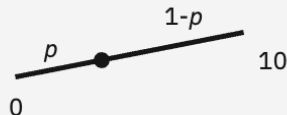
$$\sum_k p_k x_k, \quad p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1$$

直観的には

「間をとる操作」です。

例えば0 と 10 の凸結合 → 0~10の間の値になります。

$$p \cdot 0 + (1 - p) \cdot 10$$



ブロッホ球上の点の凸結合

密度行列の凸結合と同様に、ブロッホ球上の点の凸結合をとることで、量子ビットの密度行列を表現できます。

復習：密度行列の凸結合

第2回「密度行列の凸結合」より

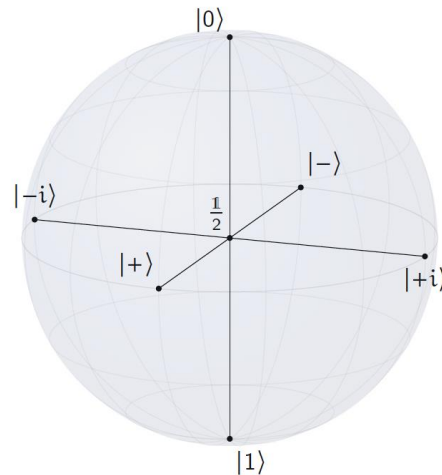
状態ベクトル $|\psi_k\rangle$ を確率 p_k で選ぶ場合、対応する密度行列は以下となります。

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$$

Quantum Tokyo

純粋状態のブロッホ球上の点の凸結合で、混合状態を表すことができ、これは、一般には、その結果は**ブロッホ球の内部**の点になります。

ブロッホ球体：ブロッホ球面上のすべての点 + その内部にある点



ブロッホ球上の点の凸結合の例：完全混合状態 $\frac{1}{2}\mathbb{I}$

完全混合状態 $\frac{1}{2}\mathbb{I}$ は、 $|0\rangle, |1\rangle$ が確率 $1/2$ ずつで混合した状態、または $|+\rangle, |-\rangle$ が混合した状態と書くことができます。 $|+i\rangle, |-i\rangle$ も同様です。

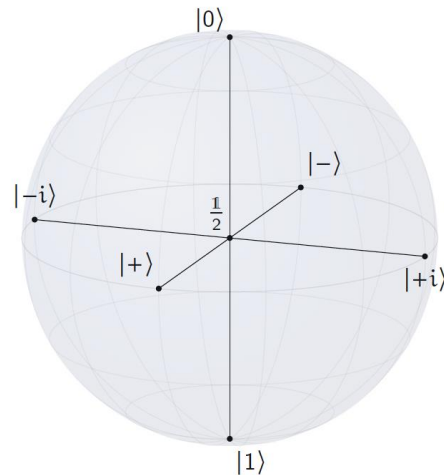
$$\frac{1}{2}\mathbb{I} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \quad \frac{1}{2}\mathbb{I} = \frac{1}{2}|+\rangle\langle +| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle -| \quad \frac{1}{2}\mathbb{I} = \frac{1}{2}|+i\rangle\langle +i| + \frac{1}{2}|-i\rangle\langle -i|$$

より一般的には、完全混合状態は、
任意の2つの直交する量子ビット状態（ブロッホ球上の互いに正反対の点）の確率 $1/2$ ずつの凸結合で表現できます。

ブロッホ球上でこの2つの点を平均すると、常に同じ点、すなわち球の中心になります。これは次の式とも一致しています：

$$\frac{1}{2}\mathbb{I} = \frac{\mathbb{I} + 0 \cdot \sigma_x + 0 \cdot \sigma_y + 0 \cdot \sigma_z}{2}$$

対応する直交座標は $(0, 0, 0)$

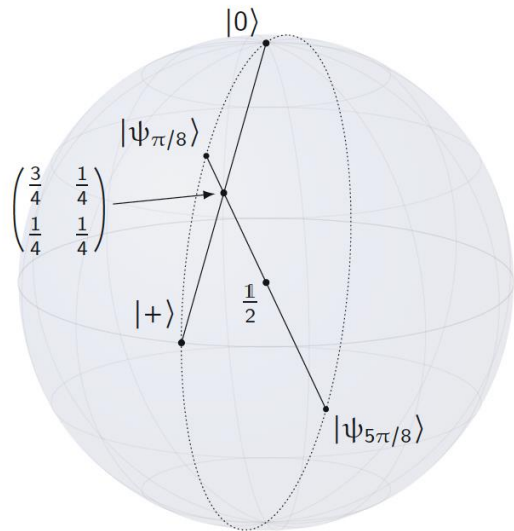


ブロッホ球上の点の凸結合の例

前のレッスンで扱った例：

$$\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|+\rangle\langle +| = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \underbrace{\cos^2(\pi/8)}_{\sim 0.85} |\psi_{\pi/8}\rangle\langle\psi_{\pi/8}| + \underbrace{\sin^2(\pi/8)}_{\sim 0.15} |\psi_{5\pi/8}\rangle\langle\psi_{5\pi/8}|$$

ただし、 $|\psi_\alpha\rangle = \cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle$ (ここで $\alpha \in [0, \pi)$)



混合状態のブロッホ球上での座標は、元の純粋状態の確率による加重平均になる。

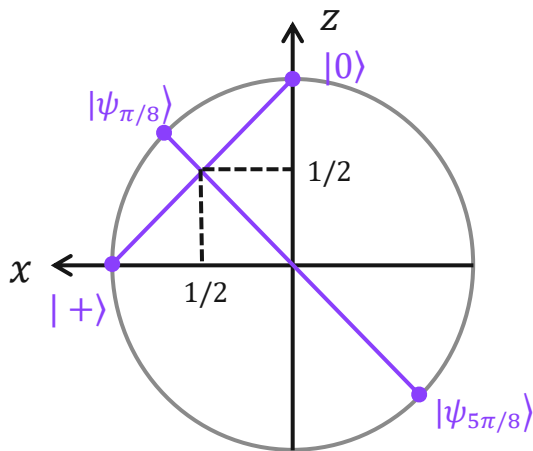
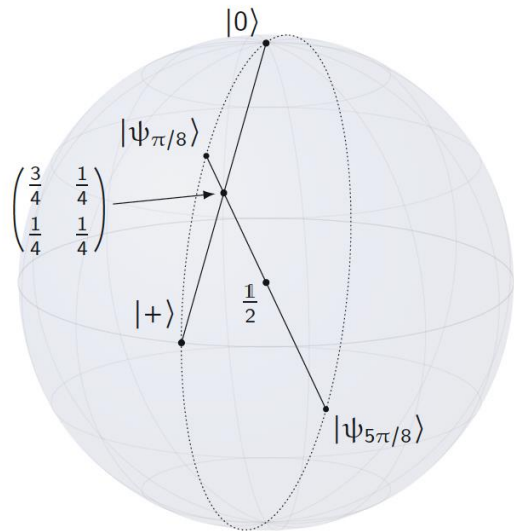
ブロッホ球上の点の凸結合の例

$$\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|+\rangle\langle +| = \frac{1}{2}\frac{\mathbb{I} + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{I} + \sigma_x}{2} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \frac{1}{2}\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_z) \rightarrow \text{直交座標}(x, y, z) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{8} |\psi_{\pi/8}\rangle\langle \psi_{\pi/8}| + \sin^2 \frac{\pi}{8} |\psi_{5\pi/8}\rangle\langle \psi_{5\pi/8}| &= \cos^2 \frac{\pi}{8} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z) \right\} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{I} + \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \frac{1}{2} \sigma_x + \frac{1}{2} \sigma_z) \end{aligned}$$

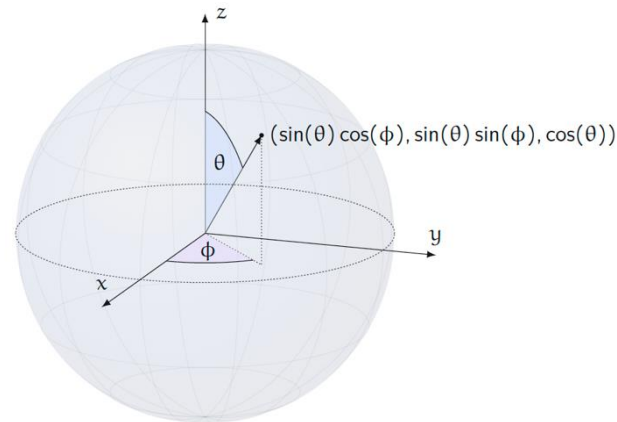
倍角の公式を使う

$$\rightarrow \text{直交座標}(x, y, z) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$



まとめ

- 量子ビットの純粋状態が $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$ (ここで $\theta \in [0, \pi]$ 、 $\phi \in [0, 2\pi)$) のとき、その密度行列は、 $|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + (\sin\theta \cos\phi)\sigma_x + (\sin\theta \sin\phi)\sigma_y + (\cos\theta)\sigma_z)$
- すべての量子ビットの純粋状態 $|\psi\rangle$ の対応する点 $(\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ が、ブロッホ球の球面となる。
- 直交してる2つの状態は、球の中心をはさんで反対側に位置する。
- ブロッホ球上の点の凸結合は、量子ビットの混合状態を表し、ブロッホ球体内部にある。
- 混合状態のブロッホ球体での座標は、元の純粋状態の確率による加重平均（重心）になる。



END

Qiskit Global Summer School

今年の登録が始まりました！
ご興味のある方は、すぐに登録してください！

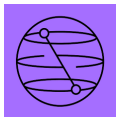
<http://ibm.biz/qgss-2026>

開催日程: 2026年7月13日～24日

無料のオンラインの量子コンピューティング学習プログラムです。
オンライン授業(リプレイあり)とQiskitハンズオンによるChallenge課題に自分のペースで取り組むことができます。

初学者の方から、プロフェッショナルの方までをサポートする内容です。

YouTube



1 The Foundations of Quantum Mechanics | Olivia Lanes | QGSS 2025
Qiskit - 3.1万回視聴 - 10 か月前

2 Introduction to Quantum Simulation | Kaelyn Ferris | QGSS 2025
Qiskit - 7127回視聴 - 9 か月前

3 John Preskill - Feynman's Dream: Simulating Nature with Quantum Machines | Distinguished Speakers
Qiskit - 9147回視聴 - 9 か月前

4 Foundational Quantum Algorithms Part I: Deutsch's and Grover's Algorithms | John Watrous | QGSS 2025
Qiskit - 4716回視聴 - 9 か月前

Qiskit Global Summer School 2026

Registration now open



IBM Quantum

<https://www.ibm.com/quantum/blog/qiskit-summer-school-2026>

Qiskit Fall Fest 2026

秋に世界中で行われるQiskitイベントの主催者の募集がはじまりました！

<https://ibm.biz/QFF26SignUp>

Qiskitイベントを皆さんが主催者となって開催するイベントで、毎年、世界中のQiskitユーザー・愛好家のみなさんが各地で企画・開催してくれています。

去年日本では、東京大学、東京科学大学、早稲田大学の学生さんが各大学で開催してくれました。

説明会参加の締切は**6/23**です！



Qiskit Fall Fest 2025 at UTokyo

IBM Quantum

Qiskit Fall Fest 2026

Applications now open



<https://www.ibm.com/quantum/blog/qiskit-fall-fest-2026>