

Channel representations チャネルの表現

2026/07/22

Hotaka Hayashi

量子情報の一般的定式化

第6回 量子チャネル - チャネルの表現

元の教材 IBM Quantum Learning:

<https://quantum.cloud.ibm.com/learning/en/courses/general-formulation-of-quantum-information/quantum-channels/representations-of-channels>

Foundations of quantum computing

Course series

Quantum Information & Computation with John Watrous



Course 1

Basics of Quantum Information

Learn about quantum information, from states and measurements to quantum circuits and entanglement.

15 hours

Course 2

Fundamentals of Quantum Algorithms

Learn how quantum algorithms beat classical algorithms for problems including integer factoring and search.

15 hours

Course 3

General Formulation of Quantum Information

Dive deeper into quantum information, including density matrices, channels, and general measurements.

15 hours

Course 4

Foundations of Quantum Error Correction

Learn how quantum computations can be protected against noise through quantum error correcting codes and fault tolerance.

15 hours

Quantum Tokyo の和訳:

<https://quantum-tokyo.github.io/introduction/courses/general-formulation-of-quantum-information/quantum-channels/representations-of-channels-ja.html>



Quantum Tokyo へようこそ

学習コンテンツ

Qiskit の始め方

IBM Quantum Platform 教材

日本語訳

ユーティリティ・スケー

量子情報の一般的定式化

General formulation of quantum information

source: <https://quantum.cloud.ibm.com/learning/ja/courses/general-formulation-of-quantum-information>

密度行列

[はじめに](#)

1. 密度行列の基礎 ([📄 解説スライド](#))
2. 密度行列の凸結合 ([📄 解説スライド](#))
3. [ブロッホ球](#)
4. [複数システムと縮約状態](#)

量子チャネル

目次

1. 前回のまとめ：量子チャネルの基礎
2. チャネルの数学的表現と例
 - Stinespring表現
 - Kraus表現
 - Choi表現

目次

1. 前回のまとめ：量子チャネルの基礎

2. チャネルの数学的表現と例

- Stinespring表現
- Kraus表現
- Choi表現

前回の復習：量子チャネルの基礎

前回第5回では、量子状態に対する操作であるチャネルの基礎を学んだ。

- チャネルとは、量子状態に対する操作を表す写像である。
写像 Φ がチャネルであること条件：
 - 線形写像である。
 - 密度行列を密度行列に変換する。つまり、 $\rho \rightarrow \Phi(\rho)$ と書くとき $\Phi(\rho)$ も密度行列。
この必要十分条件は、以下2つの条件を満たすこと。
 - ◆ Φ はトレースを保つ。
 - ◆ $\Phi(\rho)$ は半正定値である。
- チャネルの凸結合もチャネルである。
- ユニタリ変換により定まるチャネルや、その他にもさまざまな量子チャネルが存在する。

目次

1. 前回のまとめ：量子チャネルの基礎

2. チャネルの数学的表現と例

- Stinespring表現

- Kraus表現

- Choi表現

チャネルの数学的表現

問い：どのように、任意の量子チャネルを数学的に表現できるか？

状態ベクトル（量子状態の簡略化された記法）

- 量子状態に対する操作：量子状態 $|\psi\rangle$ にユニタリ行列 U をかけること。

数学的には、ベクトル $\rightarrow$ ベクトルの変換。

$$|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle$$

密度行列

- 量子状態に対する操作：量子状態 ρ にチャネル Φ を適用すること。

数学的には、行列 $\rightarrow$ 行列の変換。

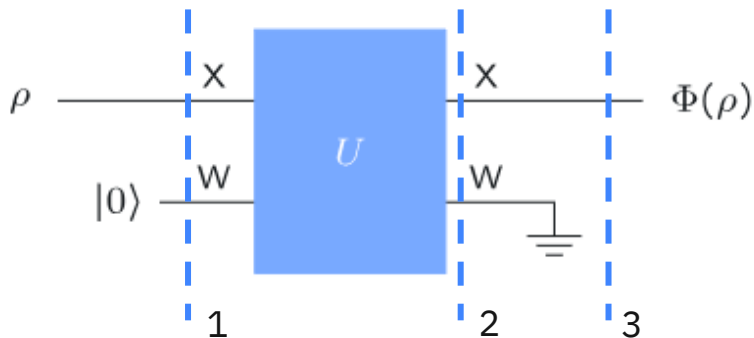
$$\rho \rightarrow \Phi(\rho)$$

簡略化された記法における「ユニタリ行列 U をかけること」と類似した記法で、密度行列 $\rightarrow$ 密度行列の任意の線形写像 Φ を表現できるだろうか？

$\rightarrow$ その答えとして、今回は異なる3種類の数学的記法を紹介する。

Stinespring表現

Stinespring表現は、量子系 X における任意のチャネルは、workspace系 W との複合系に対するユニタリ変換により実装できるという考えに基づく表現である。



【復習】

- ・【第5回】密度行列に対するユニタリ変換：

$$\rho \rightarrow U\rho U^\dagger$$

- ・【第4回】部分トレースにより、縮約状態を得る：
A系とB系の全体状態 ρ について、
A系だけの状態： $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho)$ (Bについての部分トレース)

量子系 X と workspace系 W との複合系 (W, X)

1. 初期状態（密度行列）：

$$|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho$$

2. 全体にユニタリ変換 U を適用：

$$U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger$$

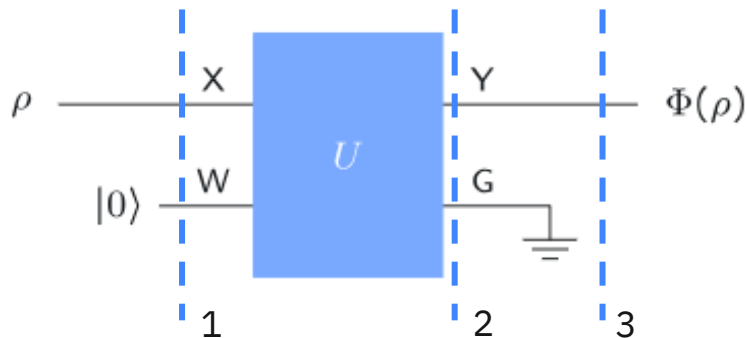
3. workspace系を捨て、量子系 X の結果に着目

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_W(U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger)$$

$X \rightarrow X$ の任意のチャネル Φ の Stinespring 表現

Stinespring表現（より一般的な記法）

入力系 X と出力系 Y が異なるときも、garbage系 G を適切に選択することで、同様に表現することが可能である。



garbage系 G の条件：

複合系 (W, X) と (G, Y) が、同数の古典的状态を持つこと。

例： (W, X) と (G, Y) がどちらも n 量子ビット系であるとき、
古典的状态の集合はどちらも $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |2^n - 1\rangle\}$

→ このとき、Stinespring表現の前提条件を満たす。

入力系 X と workspace系 W との複合系 (W, X)
→ 出力系 Y と garbage系 G との複合系 (G, Y)

1. 初期状態（密度行列）：

$$|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho$$

2. 全体にユニタリ変換 U を適用：

$$U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger$$

3. garbage系を捨て、出力系 Y の結果に着目

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_G(U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger)$$

$X \rightarrow Y$ の任意のチャネル Φ の Stinespring表現

Stinespring表現のまとめ

チャネルが、workspace系の初期化方法と出力系の選択方法が指定されたユニタリ変換として表現されているとき、これをStinespring表現という。

入力系 $X \rightarrow$ 出力系 Y のチャネル Φ のStinespring表現：

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_G(U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger)$$

※より一般的には、等長写像 A を用いて $\Phi(\rho) = \text{Tr}_G(A\rho A^\dagger)$ と書ける。

上記は $A = U(|0\rangle_W \otimes I_X)$ とした特別なケース。

等長写像 A ：列が正規直行基底を形成するが、正方行列とは限らない行列。

今後の教材で学ぶこと：

- ・全てのチャネルはStinespring表現を持つ。
- ・Stinespring表現は一意ではなく、あるチャネルのStinespring表現は複数ありうる。

Stinespring表現の例

完全位相緩和チャネル

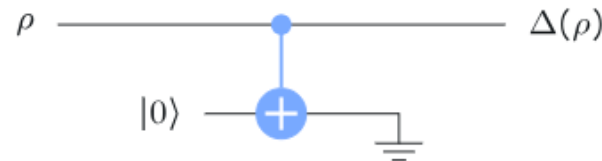
・ 初期状態 : $|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \langle 0|\rho|0\rangle & \langle 0|\rho|1\rangle \\ \langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 0|\rho|0\rangle & \langle 0|\rho|1\rangle & 0 & 0 \\ \langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

・ CNOTゲート (Xが制御ビット) : 行列表示 $CX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$CX(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)CX^\dagger = \begin{pmatrix} \langle 0|\rho|0\rangle & 0 & 0 & \langle 0|\rho|1\rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle 1|\rho|0\rangle & 0 & 0 & \langle 1|\rho|1\rangle \end{pmatrix}$$

- ・ 部分トレースでWを破棄 :

$$\text{Tr}_W(CX(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)CX^\dagger) = \begin{pmatrix} \langle 0|\rho|0\rangle & 0 \\ 0 & \langle 1|\rho|1\rangle \end{pmatrix}$$



【第4回の復習】部分トレースの考え方 :

系Wのビット (左側・赤字のビット) が、行と列で一致する成分だけを残し、Xについての密度行列を作る。

$$\begin{matrix} & |00\rangle & |01\rangle & |10\rangle & |11\rangle \\ \begin{matrix} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \text{Tr}_W(\rho) = \begin{matrix} |00\rangle & |01\rangle \\ |00\rangle & |01\rangle \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} + \begin{matrix} |10\rangle & |11\rangle \\ |10\rangle & |11\rangle \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

【復習】

- ・ 完全位相緩和チャネル : 密度行列の対角以外の成分を全て0にする。

Stinespring表現の例

完全位相緩和チャネル（前ページと異なる表現）

・ Hゲート実行後の状態 : $|+\rangle\langle+|_W \otimes \rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \langle 0|\rho|0\rangle & \langle 0|\rho|1\rangle \\ \langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle \end{pmatrix}$

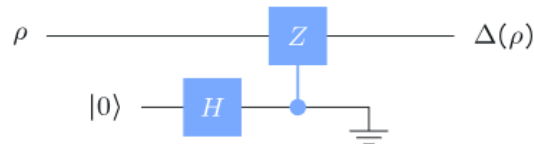
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle 0|\rho|0\rangle & \langle 0|\rho|1\rangle & \langle 0|\rho|0\rangle & \langle 0|\rho|1\rangle \\ \langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle & \langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle \\ \langle 0|\rho|0\rangle & \langle 0|\rho|1\rangle & \langle 0|\rho|0\rangle & \langle 0|\rho|1\rangle \\ \langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle & \langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle \end{pmatrix}$$

・ CZゲート（Wが制御ビット） : 行列表示 $CZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$CZ(|+\rangle\langle+|_W \otimes \rho)CZ^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle 0|\rho|0\rangle & \langle 0|\rho|1\rangle & \langle 0|\rho|0\rangle & -\langle 0|\rho|1\rangle \\ \langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle & \langle 1|\rho|0\rangle & -\langle 1|\rho|1\rangle \\ \langle 0|\rho|0\rangle & \langle 0|\rho|1\rangle & \langle 0|\rho|0\rangle & -\langle 0|\rho|1\rangle \\ -\langle 1|\rho|0\rangle & -\langle 1|\rho|1\rangle & -\langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle \end{pmatrix}$$

・ 部分トレースでWを破棄 :

$$\text{Tr}_W(CZ(|+\rangle\langle+|_W \otimes \rho)CZ^\dagger) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \langle 0|\rho|0\rangle & \langle 0|\rho|1\rangle \\ \langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle 0|\rho|0\rangle & -\langle 0|\rho|1\rangle \\ -\langle 1|\rho|0\rangle & \langle 1|\rho|1\rangle \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \langle 0|\rho|0\rangle & 0 \\ 0 & \langle 1|\rho|1\rangle \end{pmatrix}$$



Kraus表現

Kraus表現は、チャネルによる密度行列の変換を、行列の積と和により表現する方法である。

入力系 $X \rightarrow$ 出力系 Y のチャネル Φ のKraus表現：

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \rho A_k^\dagger$$

- ・ $A_0, A_1, \dots, A_{N-1}$: 列数は X の古典的状态数 n 、行数は Y の古典的状态数 m の行列。
 $\sum_{k=0}^{N-1} A_k^\dagger A_k = I_X$ (トレース保存の条件) を満たす。
- ・ N は任意の正の整数をとることができる。
ただし、 X の要素数 $= n$, Y の要素数 $= m$ としたとき、 N は最大でも mn で十分。

Kraus表現の例

量子ビットリセットチャネル

- ・ Kraus表現における量子ビットリセットチャネルは、 $A_0 = |0\rangle\langle 0|$, $A_1 = |0\rangle\langle 1|$ として表現可能。

$$\begin{aligned}\Phi(\rho) &= A_0 \rho A_0^\dagger + A_1 \rho A_1^\dagger = |0\rangle\langle 0| \rho |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \rho |1\rangle\langle 0| \\ &= \langle 0| \rho |0\rangle |0\rangle\langle 0| + \langle 1| \rho |1\rangle |0\rangle\langle 0| = (\langle 0| \rho |0\rangle + \langle 1| \rho |1\rangle) |0\rangle\langle 0| \\ &= \text{Tr}(\rho) |0\rangle\langle 0|\end{aligned}$$

ユニタリチャネル

- ・ 量子状態に対しユニタリ変換 U をかけるチャネルは、 $\Phi(\rho) = U\rho U^\dagger$ とかける。
これは、Kraus表現において $A_0 = U$ とすればよい。

$$\Phi(\rho) = A_0 \rho A_0^\dagger = \underline{U \rho U^\dagger}$$

【復習】

- ・ 量子ビットリセットチャネル：量子ビットの状態を $|0\rangle\langle 0|$ にする。

Choi表現

Choi表現は、チャネルをChoi行列という単一の行列で表現する方法である。

入力系 $X \rightarrow$ 出力系 Y のチャネル Φ のChoi表現（Choi行列）：

$$J(\Phi) = \sum_{a,b \in \Sigma} |a\rangle\langle b| \otimes \Phi(|a\rangle\langle b|)$$

- ・ 入力系 X の古典的状态集合 $\Sigma = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ とするとき：

$$J(\Phi) = \begin{pmatrix} \Phi(|0\rangle\langle 0|) & \Phi(|0\rangle\langle 1|) & \dots & \Phi(|0\rangle\langle n-1|) \\ \Phi(|1\rangle\langle 0|) & \Phi(|1\rangle\langle 1|) & & \Phi(|1\rangle\langle n-1|) \\ \vdots & & \ddots & \\ \Phi(|n-1\rangle\langle 0|) & \Phi(|n-1\rangle\langle 1|) & & \Phi(|n-1\rangle\langle n-1|) \end{pmatrix}$$

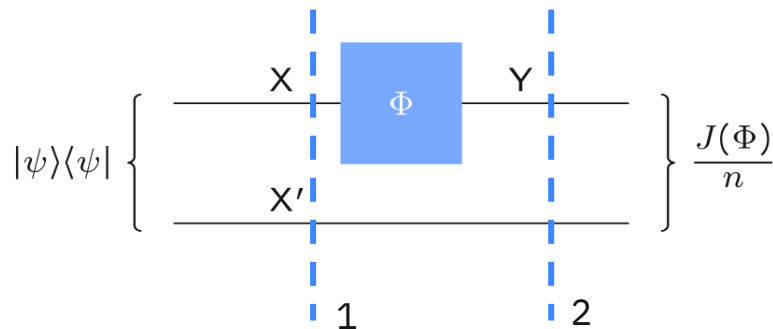
$\Phi(|a\rangle\langle b|) : m \times m$ 行列。出力系 Y の密度行列である。

つまり、Choi行列は (a, b) 成分のブロックとして、行列 $\Phi(|a\rangle\langle b|)$ を持つような行列。

- ・ Choi行列は忠実な表現である。つまり、ある2つの線形写像について**Choi行列が一致**することは、それらの写像が同一であることの必要十分条件である。

Choi表現（密度行列との結びつき）

Choi行列は、ある量子系とそのコピー系に対する、量子変換後の状態を表す密度行列として理解できる。



右記の結果は、 $\frac{J(\Phi)}{n}$ が密度行列であることを示す。

入力系 X とそのコピー系 X' との複合系 (X', X)
→ 出力系 Y とコピー系 X' との複合系 (X', Y)

以下の初期状態を用意：

$$\text{複合系の量子状態 } |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{a=0}^{n-1} |a\rangle \otimes |a\rangle$$

1. 初期状態（密度行列）：

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{n} \sum_{a,b=0}^{n-1} |a\rangle\langle b| \otimes |a\rangle\langle b|$$

2. 入力系 X のみに対しチャネル Φ を適用：

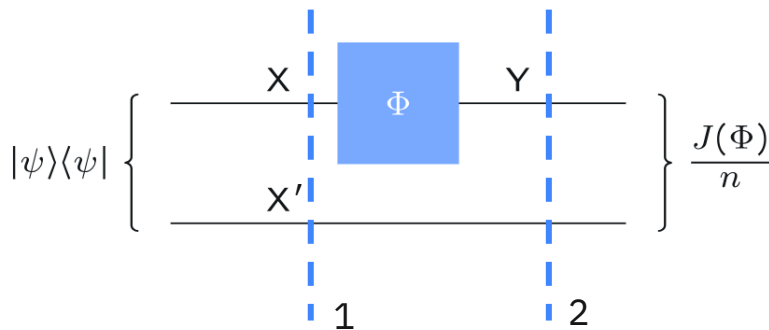
$$(\text{Id} \otimes \Phi)(|\psi\rangle\langle\psi|) = \frac{1}{n} \sum_{a,b=0}^{n-1} |a\rangle\langle b| \otimes \Phi(|a\rangle\langle b|) = \frac{J(\Phi)}{n}$$

Choi表現（密度行列との結びつき）

Choi行列を密度行列と解釈すると、Choi行列の性質を密度行列と紐づけて理解できる。

$$(\text{Id} \otimes \Phi)(|\psi\rangle\langle\psi|) = \frac{1}{n} \sum_{a,b=0}^{n-1} |a\rangle\langle b| \otimes \Phi(|a\rangle\langle b|) = \frac{J(\Phi)}{n}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{a=0}^{n-1} |a\rangle \otimes |a\rangle$$



- 出力系 Y を無視したコピー系 X' は、単なる完全混合状態のはずである。

$$\text{Tr}_Y\left(\frac{J(\Phi)}{n}\right) = \frac{I_{X'}}{n} \rightarrow \text{Tr}_Y(J(\Phi)) = I_X$$

- $\frac{J(\Phi)}{n}$ は密度行列であるため、半正定値である。
その正の定数倍の $J(\Phi)$ も半正定値である。

今後学ぶこと

- 本ページで示した2つの条件は、あるチャネルのChoi行列であることの必要十分条件となる。

Choi表現の例

完全脱分極チャネル

- 完全脱分極チャネル Ω のChoi表現は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} J(\Omega) &= \sum_{a,b=0}^1 |a\rangle\langle b| \otimes \Omega(|a\rangle\langle b|) \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes \Omega(|0\rangle\langle 0|) + |0\rangle\langle 1| \otimes \Omega(|0\rangle\langle 1|) + |1\rangle\langle 0| \otimes \Omega(|1\rangle\langle 0|) + |1\rangle\langle 1| \otimes \Omega(|1\rangle\langle 1|) \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes \text{Tr}(|0\rangle\langle 0|) \frac{1}{2} \text{I} + |0\rangle\langle 1| \otimes \text{Tr}(|0\rangle\langle 1|) \frac{1}{2} \text{I} + |1\rangle\langle 0| \otimes \text{Tr}(|1\rangle\langle 0|) \frac{1}{2} \text{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \text{Tr}(|1\rangle\langle 1|) \frac{1}{2} \text{I} \\ &= (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \otimes \frac{1}{2} \text{I} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

【復習】

- 完全脱分極チャネル：完全混合状態を出力する。

$$\Omega(\rho) = \text{Tr}(\rho) \frac{1}{2} \text{I}$$

$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正定値であり、かつYを左のビットとすると、

$$\text{Tr}_Y \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Choi行列である必要十分条件を満たす。

まとめ

今回は、任意の量子チャネル Φ を表現する方法として3つの手法を学習した。

Stinespring表現 :

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_G(U(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)U^\dagger)$$

例 : $\text{Tr}_W(CX(|0\rangle\langle 0|_W \otimes \rho)CX^\dagger)$, $\text{Tr}_W(CZ(|+\rangle\langle +|_W \otimes \rho)CZ^\dagger)$ (完全デコヒーレンスチャネル)

Kraus表現 :

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \rho A_k^\dagger$$

例 : $A_0 \rho A_0^\dagger + A_1 \rho A_1^\dagger = |0\rangle\langle 0| \rho |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \rho |1\rangle\langle 0|$ (完全デコヒーレンスチャネル)

$A_0 \rho A_0^\dagger = U \rho U^\dagger$ (ユニタリチャネル)

Choi表現 (Choi行列) :

$$J(\Phi) = \sum_{a,b \in \Sigma} |a\rangle\langle b| \otimes \Phi(|a\rangle\langle b|)$$

※Choi行列は忠実な表現である。(Choi行列が一致する $\Leftrightarrow$ チャネルが一致する)

次回学ぶこと : これらの表現は数学的に等価であり、またチャネルの定義を正しく捉えている。

Choi表現が忠実な表現であることについて

2つのチャネルが同一であることの必要十分条件は、2つのチャネルのChoi行列が一致すること。
しかし、このことの解説が元の教材にないため、このページで確認する。

1. 2つの線形写像 Φ, Ψ は同一である。（※チャネル、より広い概念として線形写像とする）
2. 2つのChoi行列 $J(\Phi), J(\Psi)$ は同一である。

【命題】 1ならば2であり、2ならば1である。

1 $\rightarrow$ 2

$$J(\Phi) = \sum_{a,b=0}^{n-1} |a\rangle\langle b| \otimes \Phi(|a\rangle\langle b|) = \sum_{a,b=0}^{n-1} |a\rangle\langle b| \otimes \Psi(|a\rangle\langle b|) = J(\Psi)$$

2 $\rightarrow$ 1

$$J(\Phi) = \sum_{a,b=0}^{n-1} |a\rangle\langle b| \otimes \Phi(|a\rangle\langle b|) = \sum_{a,b=0}^{n-1} |a\rangle\langle b| \otimes \Psi(|a\rangle\langle b|) = J(\Psi)$$

より、Choi行列の (a, b) ブロック成分について両辺が一致するために、 $\Phi(|a\rangle\langle b|) = \Psi(|a\rangle\langle b|)$ が成立。

任意の行列 $\rho = \sum_{a,b=0}^{n-1} p_{a,b} |a\rangle\langle b|$ と書くと、写像が線形であることを利用して

$$\Phi(\rho) = \sum_{a,b=0}^{n-1} p_{a,b} \Phi(|a\rangle\langle b|) = \sum_{a,b=0}^{n-1} p_{a,b} \Psi(|a\rangle\langle b|) = \Psi(\rho)$$